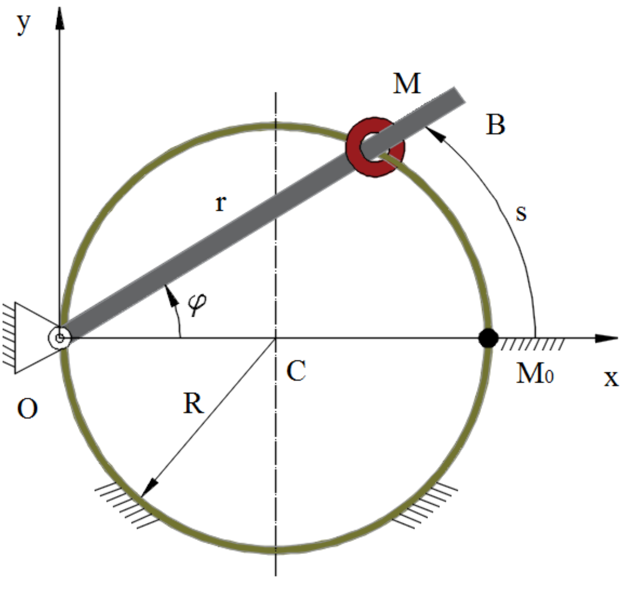
UNIVERZITET U ISTOČNOM SARAJEVU

MAŠINSKI FAKULTET

Ranko Antunović

MEHANIKA

KINEMATIKA



Ranko Antunović

MEHANIKA

KINEMATIKA

I izdanje

Istočno Sarajevo, 2017. god.

Autor:
dr Ranko Antunović, vanredni profesor, Mašinski fakultet Istočno Sarajevo

MEHANIKA - KINEMATIKA
Prvo izdanje

Recenzenti:
Akademik prof. dr Ranislav Bulatović, Mašinski fakultet Podgorica
Prof. emiritus dr Dušan Vukojević, Mašinski fakultet Zenica

Izdavač
Mašinski fakultet Istočno Sarajevo
Vuka Karadžića br.30, Lukavica
Za izdavača:
Prof. dr Ranko Antunović, dekan Mašinskog fakulteta u Istočnom Sarajevu

Tehnička obrada
Nikola Vučetić mr, dipl.maš.inž.
Ratko Joksimović, dipl.maš.inž.

Tiraž: 200 primjeraka
Štampa: ERMEX, Istočno Sarajevo

Odlukom Naučno-nastavnog vijeća Mašinskog fakulteta u Istočnom Sarajevu br. 21-C-2/17, ova knjiga je odobrena da se štampa kao univerzitetski udžbenik.

PREDGOVOR

Ovaj univerzitetski udžbenik nastao je, prije svega, na osnovu predavanja i vježbi koje je autor držao na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Istočnom Sarajevu iz grupe predmeta teorijske mehanike, oblast kinematika.

Pri izlaganju materije zadržalo se na klasičnoj podjeli kinematike. U prvom dijelu knjige proučeni su zakoni kinematike tačke, a u drugom dijelu zakoni kinematike krutog tijela. Radi boljeg razumijevanja materije, složeno kretanje tačke i krutog tijela proučene su kao posebe cjeline. Takođe, pošto kinematika ima svoje samostalno značenje koje se pojavljuje i u području proučavanja mehanizama, u posljednjem poglavlju knjige prikazani su osnovni elementi teorije mehanizama.

Knjiga je namijenjena, prije svega, studentima mašinskih fakulteta, ali se može koristiti i na ostalim tehničkim fakultetima i visokim školama.

Vodeći se činjenicom da je za studente tehnike jako bitno da podjednako ovladaju teorijom i primjenom teorije kinematike u rješavanju konkretnih zadataka, uz svako poglavlje riješen je veći broj zadataka sa komentarima koji prate izloženu materiju.

Značajnu podršku i sugestije za konačno oblikovanje ovog udžbenika dali su recenzenti *akademik prof. dr* Ranislav Bulatović i *prof. dr emiritus* Dušan Vukojević. Takođe, posebnu zahvalnost dugujem asistentu Nikoli Vučetiću i Ratku Joksimoviću koji su uradili grafičku pripremu i obradu teksta.

Unaprijed se zahvaljujem svim čitaocima na dobronamjernim primjedbama kako bi se kvalitet udžbenika u narednom izdanju poboljšao.

AUTOR

SADRŽAJ

1. UVODNA RAZMATRANJA

a) Osnovni pojmovi

Kinematika je dio teorijske mehanike u kome se proučavaju kretanja mehaničkih objekata, ne uzimajući u obzir njihovu materijalnost, kao ni uzroke koji uslovljavaju ta kretanja. U kinematici se proučavaju geometrijska svojstva kretanja objekata, te se kinematika naziva još i geometrijom kretanja.

Kao zaseban dio teorijske mehanike, kinematika se izdvojila u prvoj polovini XIX vijeka, jer se pokazalo da je u mnogim inžinjerskim problemima značajno proučiti geometrijska svojstva kretanja posmatranog objekta, ne uzimajući u obzir njegovu težinu, strukturu, kao ni sile koje koje su uzrok toga kretanja. Za razliku od geometrije, kinematika za opisivanje mehaničkog kretanja pored prostora uzima u obzir i vrijeme.

Model mehaničkog objekta, čije se kretanje proučava u kinematici, je tačka i kruto tijelo. Kruto tijelo predstavlja tijelo koje ne mijenja svoj geometrijski oblik i zapreminu, udaljenost između bilo koje dvije tačke tijela tokom kretanja je nepromjenjiv, pri dejstvu drugih tijela na njega. Tačka je tijelo nulte dimenzije te kod nje obrtanje ne dolazi u obzir kao što je to slučaj sa tijelom.

Pod *mehaničkim kretanjem* podrazumijeva se promjena položaja koje tokom vremena jedno tijelo vrši u odnosu na drugo tijelo.

Mehaničko kretanje tijela je moguće proučiti samo ako postoji drugo tijelo u odnosu na koje vršimo upoređivanje, koje nazivamo referentno tijelo. Zavisno od vrste posmatranog problema, u svakom posmatranom slučaju vrši se izbor referentnog tijela za koji vežemo određeni sistem refrence u odnosu na koji određujemo osnovne karakteristike kretanja: trajektorija (zamišljena neprekidna linija položaja tijela), brzina i ubrzanje.

Kretanje tačke ili tijela u odnosu na apsolutno nepokretni sistem referencije, naziva se *apsolutno kretanje*. Kretanje tačke ili tijela u odnosu na drugo pokretno tijelo, naziva se *relativno kretanje*. Poznato je da u prirodi ne postoje apsolutno nepokretna tijela, tako da je bez dodatnih aproksimacija nemoguće govoriti o apsolutnom miru i apsolutnom kretanju. Konvencijom je regulisano da se stanje mirovanja, odnosno kretanja, u odnosu na Zemlju smatra uslovno apsolutnim.

b) Prostor i vrijeme

Kretanje tijela se vrši tokom vremena u prostoru, tako da se u kinematici u analizu uvode dvije veličine: dužina (L) čija je osnovna jedinica metar (*m*) i vrijeme (*t*) čija je osnovna jedinica sekunda (*s*).

Sekunda (*s*), kao osnovna jedinica za vrijeme, definiše se kao:

Sekunda je trajanje od 9192631770 perioda zračenja, koje odgovara prelazu između dva hiperfina nivoa osnovnog stanja atoma cezijuma 133Cs.

Metar (*m*), kao osnovna jedinica za dužinu, definiše se kao:

Metar je dužina putanje koju u vakumu pređe svjetlost za vrijeme od 1/(299 792 458) sekundi.

Prostor u mehanici je trodimenzionalan i može se opisati pomoću aksioma poznatih u Euklidovoj geometriji. Euklidov prostor je homogen i neograničen i nezavisan je od svojstava objekta koji se u njemu nalaze.

Vrijeme u klasičnoj mehanici je pozitivna skalarna veličina koja se neprekidno mijenja i uzima se za nezavisno promjenjivu veličinu, koju obilježavamo sa *t*. Sve ostale veličine u kinematici se posmatraju kao funkcije vremena. Prilikom mjerenja vremena uvodimo pojam početnog trenutka vremena, određenog trenutka vremena i intervala vremena.

Početni trenutak vremena (t_0), naziva se trenutak od kada počinjemo da mjerimo vrijeme, tj. od kog ga počinjemo da posmatramo kretanje. Obično se usvaja da je početni trenutak vremena ($t_0=0$). Vrijeme neprestano teče i argument *t*,u funkciji koga definišemo sve kinematičke veličine, je uvijek pozitivna rastuća veličina.

Određeni trenutak vremena (*t*), definiše se brojem sekundi koji su protekli od početnog trenutka vremena.

Interval vremena ($\Delta t=t_2-t_1$), naziva se vrijeme koje protekne između dvije određene pojave, što u stvari predstavlja vremensku razliku između bilo koja dva posmatrana trenutka kretanja.

Albert Einstein (1905) uvodi nove pojmove o prostoru i vremenu. Prema teoriji relativnosti, apsolutno mirovanje ne postoji. Einsteinova teorija negira npr. i apsolutnu udaljenost. Međutim, kako značajnija odstupanja od klasičnih zakona kinematike nastaju samo u pojavama kod kojih se brzine kretanja približavaju brzini svjetlosti, u tehničkoj kinematici operirat ćemo klasičnim pojmovima prostora i vremena.

c) Osnovni zadaci i podjela kinematike

Položaj posmatrnog objekta u prostoru u odnosu na referentno tijelo određuje se odgovarajućim veličinama. Zavisnosti pomoću kojih se određuje položaj objekta u svakom trenutku vremena, u odnosu na referentno tijelo, nazivaju se *jednačine kretanja* ili *zakoni kretanja* posmatranog objekta. Nameću se osnovna dva zadatka kinematike:

- određivanje jednačina kretanja, odnosno određivanje analitičkih postupaka za definisanje kretanja posmatranog objekta u odnosu na utvrđeni sistem reference
- polazeći od jednačina kretanja, koje su zadate ili određene, cilj drugog (osnovnog) zadatka kinematike je određivanje karakteristika posmatranog kretanja, kao što su: trajektorija, brzina, ubrzanje itd.

Kretanje nekog tijela poznajemo ako poznajemo položaj svake tačke tog tijela u toku vremena kretanja. Zbog toga će biti prvo proučeno kretanje tačke, a zatim tijela. Tako da kinematiku možemo podijeliti na:

1. Kinematiku tačke
2. Kinematiku krutog tijela

Tačka u kinematičkom smislu je geometrijska tačka koja mijenja položaj u prostoru tokom vremena. Tačka može biti, uočena tačka nekog tijela ili to može biti tijelo zanemarljivo malih dimenzija.

Ova podjela nema jasne i određene granice jer se kinematika tačke gotovo svugdje pojavljuje i u kinematici tijela. Brzina i ubrzanje mogu pripadati samo pojedinoj tački tijela, a samo u izuzetnim slučajevima čitavom tijelu.

Značaj proučavanja kinematike je ipak višestruk. U mnogo čemu je kinematika uvod u dinamiku, ali ona ima svoje samostalno značenje koje se pojavljuje u području proučavanja mehanizama, jer kod mnogih mehanizama pravilno funkcionisanje mehanizma se zasniva u prvom redu na detaljnoj kinematičkoj analizi kretanja pojedinih njegovih dijelova.

2. KINEMATIKA TAČKE

2.1. POSTUPCI ODREĐIVANJA KRETANJA TAČKE

Pri kretanju tačke mijenja se njen položaj u odnosu na referentno tijelo, odnosno tačka prelazi iz početnog u neki proizvoljan položaj.
Zavisnost između proizvoljnog položaja tačke u prostoru i vremena određuje *zakon kretanja tačke*, pa je osnovni zadatak kinematike tačke proučavanje zakona kretanja tačke.

Putanja ili trajektorija tačke je zamišljena neprekidna linija koju opisuje pokretna tačka *M* tokom kretanja u prostoru. Dio putanje između dva uzastopna položaja tačke *M* naziva se pređeni put.

Zavisno od oblika putanje tačke, razlikuje se *pravolinijsko i krivolinijsko kretanje tačke.*

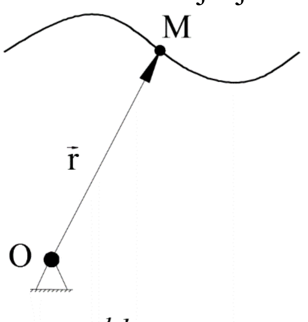
Proučavanje kretanja tačke vrši se u odnosu na uslovno apsolutno nepokretni sistem referencije. Za definisanje proizvoljnog krivolinijskog kretanja tačke u prostoru najčešće se primjenjuju sledeća tri postupka:

1. Vektorski
2. Analitički (koordinatni)
3. Prirodni

2.1.1. Vektorski postupak određivanja kretanja tačke

Položaj tačke M, pri proizvoljnom krivolinijskom kretanju, u potpunosti je određeno vektorom položaja $\vec{r}$, čiji je početak u nekoj nepokretnoj tački *O*, a kraj u pokretnoj tački *M* (*sl.1.*).

Pošto tačka *M* mijenja svoj položaj u odnosu na tačku O tokom vremena, mijenja se i vektor položaja $\vec{r}$ po intizitetu, pravcu i smjeru. Prema tome, vektor položaja $\vec{r}$ predstavlja jednoznačnu funkciju vremena *t*,



sl.1.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{2.1}$$

Jednačinom (2.1) određen je položaj tačke *M* u svakom trenutku vremena, zbog čega ona predstavlja *zakon kretanja tačke u vektorskom obliku* ili konačnu jednačinu krivolinijskog kretanja tačke u vektorskom obliku. Pri tome, vektor položaja $\vec{r}$ mora biti neprekidna funkcija vremena, jednoznačna i dva puta diferencijabilna.

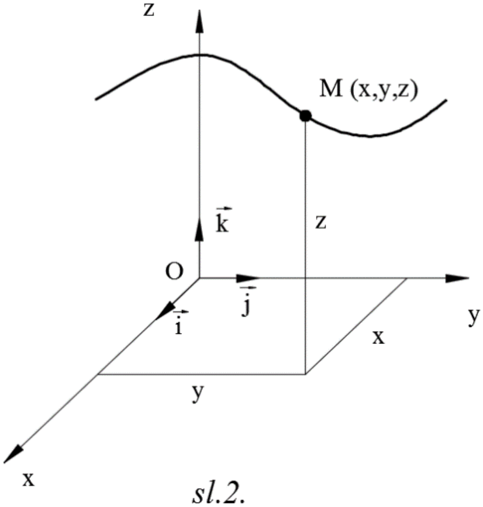
Putanja tačke dobije se spajanjem geometrijskih mjesta krajeva vektora položaja $\vec{r}$ i naziva se *hodograf vektora položaja* $\vec{r}$.

2.1.2. Analitički (koordinatni) postupak određivanja kretanja tačke

Položaj tačke u prostoru, u opštem slučaju, određen je sa tri nezavisna parametra, što znači da tačka u prostoru ima tri stepena slobode kretanja. Nezavisni parametri predstavljaju koordinatne tačke u odnosu na neki koordinatni sistem i za kretanje tačke se tada kaže da je određeno analitičkim (koordinatnim) načinom. U narednim razmatranjima biće riječi o koordinatnim sistemima koji se najčešće koriste u teorijskoj mehanici.

a) Dekartov pravougli koordinatni sistem

Dekartov koordinatni sistem obrazuju tri međusobno upravno orjentisane koordinatne ose *Ox, Oy* i *Oz,* koje prolaze kroz jednu presječnu tačku (*sl.2*) i čiji su jedinični vektori osa $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$ respektivno. Položaj proizvoljne tačke M, u odnosu na Dekartov koordinatni sistem, određen je koordinatama (*x*,*y*,*z*).



sl.2.

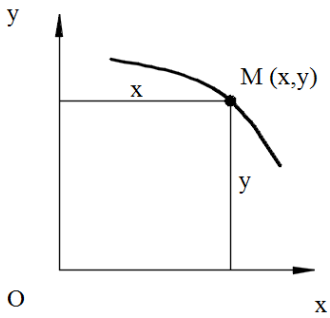
Kretanje tačke M u odnosu na koordinatni sistem poznato je ako je poznat položaj tačke, u svakom trenutku vremena, u odnosu na taj koordinatni sistema. Pa prema tome, proizvoljno krivolinijsko kretanje tačke M u prostoru, u odnosu na nepokretni Dekartov sistem reference O_{xyz}, u potpunosti je određeno ako su u svakom trenutku vremena poznate tri pravougaone Dekartove koordinate tačke $M(x,y,z)$, tj.

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t) \tag{2.2}$$

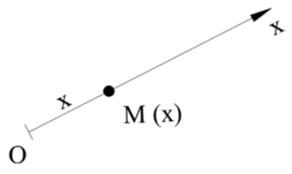
Jednačine (2.2) predstavljaju *zakon kretanja ili konačne jednačine krivolinijskog kretanja tačke u Dekartovim koordinatama* ako su one neprekidne funkcije vremena, jednoznačne i dva puta diferencijabilne. Eleminacijom parametra t iz jednačina kretanja dobija se jednačina linije putanje tačke.

Ako se tačka M kreće u ravni O_{xy} (*sl.3*), tada su konačne jednačine kretanja tačke određene jednačinama:

$$x = x(t),\ \ y = y(t) \tag{2.3}$$



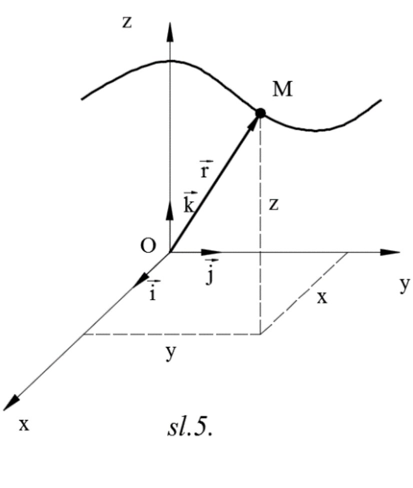
sl.3.



sl.4.

Za slučaj da se tačka M kreće po pravoj liniji, takvo kretanje tačke moguće je pratiti i u odnosu na jednu koordinatnu osu O_x, koja se poklapa sa pravcem kretanja tačke (*sl.4*). Jednačina kretanja uočene tačke M, u ovom slučaju je:

$$x = x(t) \tag{2.4}$$



sl.5.

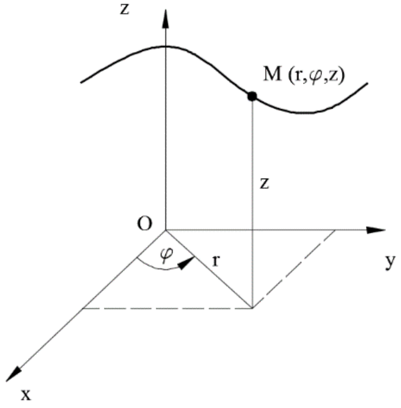
Ako tačku O, koja je početak vektora položaja $\vec{r}$, usvojimo i za početak Dekartovog pravougaonog koordinatnog sistema O_{xyz} (*sl.5*), onda je moguće vektor položaja tačke M izraziti pomoću Dekartovih koordinata. Vektor položaja $\vec{r}$ tačke M može se predstaviti u obliku (*sl.5*),

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k} \tag{2.5}$$

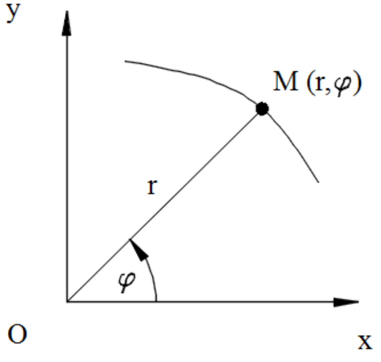
Jednačina (2.5) predstavlja vezu između vektorskog i koordinatnog postupka određivanja kretanja tačke.

b) Polarno-cilindrični i polarni koordinatni sistem

Kretanje tačke M (*sl.6*) moguće je odrediti i pomoću polarno-cilindričnih koordinata (*r*,*φ*,*z*), koje se nazivaju polarno rastojanje (poteg), polarni ugao i aplikata, respektivno.



sl.6.



sl.7.

Kretanje tačke *M*, u svakom momentu vremena, jednoznačno je određeno pomoću koordinata:

$$r = r(t), \ \ \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t) \tag{2.6}$$

Jednačine (2.6), pod uslovom da su neprekidne i dva puta diferencijabilne funkcije vremena, predstavljaju *zakon kretanja ili konačne jednačine krivolinijskog kretanja tačke u polarno-cilindričnim koordinatama*.

Ako se tačka M kreće u ravni O_{xy} *(sl.7)*, onda se kretanje tačke može odrediti preko polarnih koordinata r i φ:

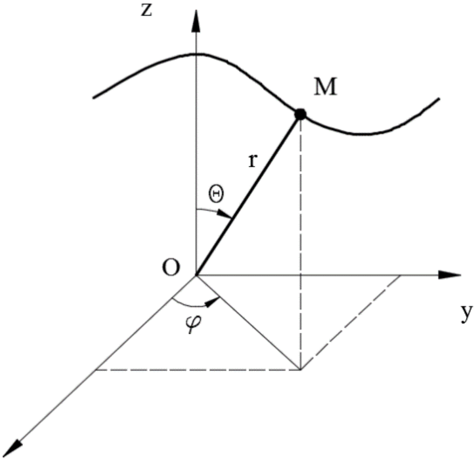
$$r = r(t), \ \ \varphi = \varphi(t) \tag{2.7}$$

Jednačine (2.7), ako su neprekidne funkcije i dva puta diferencijabilne, predstavljaju zakon kretanja odnosno konačne jednačine kretanja tačke u polarnim koordinatama.

Rastojanje $\overline{OM} = r$, naziva se polarno rastojanje ili *poteg*, a koordinata φ je *polarni ugao*.

c) Sferni koordinatni sistem

Položaj tačke M, pri proizvoljnom krivolinijskom kretanju u prostoru, moguće je odrediti i pomoću sfernih koordinata (r,φ,θ) (*sl.8.*).



sl.8.

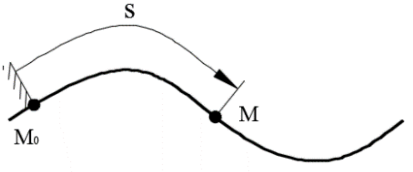
Kretanje tačke M, u odnosu na sferni koorinatni sistem, jednoznačno je određeno ako su poznate neprekidne i najmanje dva puta diferencijabilne funkcije vremena,

$$r = r(t),\ \varphi = \varphi(t),\ \theta = \theta(t) \qquad (2.8)$$

Jednačine (2.8) predstavljaju *zakon kretanja ili konačne jednačine krivolinijskog kretanja tačke u sfernim koordinatama*.

2.1.3. Prirodni postupak određivanja kretanja tačke

Za potpuno određivanje kretanja tačke prirodnim načinom potrebno je poznavati putanju tačke. Ona može biti data jednačinama čiji oblik zavisi od izabranog sistema reference. Ako je poznata putanja po kojoj se kreće tačka *M*, onda je moguće odrediti položaj tačke *M* tako što se izabere bilo koja nepokretna tačka M_0 na liniji putanje za referentnu tačku, tj. za početak sistema referencije, a putanja se usvoji za krivolinijsku koordinatnu osu, čiji je jedan smjer pozitivni a drugi negativni (*sl.9*). Time je, krivolinijskom koordinatom $s = \widehat{M_oM}$, u potpunosti određen položaj tačke *M* na putanji.



sl.9.

Pri kretanju tačke *M* po putanji, krivolinijska koordinata *s* se mijenja tokom vremena, tj. ona je funkcija vremena,

$$s = s(t) \tag{2.9}$$

Ako je lučna koordinata s jednoznačna, neprekidna i dva puta diferencijabilna funkcija vremena, jenačina (2.9) predstavlja *konačnu jednačina kretanja tačke po putanji ili zakon kretanja tačke po putanji*. Krivolinijsku koorinatu $s = s(t)$ treba razlikovati od pređenog puta S tačke M po putanji. Vodeći računa o tome, pri izračunavanju pređenog puta u nekom intervalu vremena od t_1 do t_2, cio interval vremena se rastavlja na manje intervale Δt_i u kojima tačka ne mijenja smjer kretanja. Neka su u tom slučaju odgovarajuće promjene linijske koordinate u vremenskim intervalima Δt_i označene sa Δs_i. Ukupan pređeni put S tačke je uvijek pozitivan i određuje se kao,

$$S = \sum_{i=1}^{n} |\Delta s_i|. \tag{2.10}$$

Primjenom graničnog procesa, kod koga svi priraštaji Δs_i teže nuli, ukupni pređeni put tačke može se odrediti kao

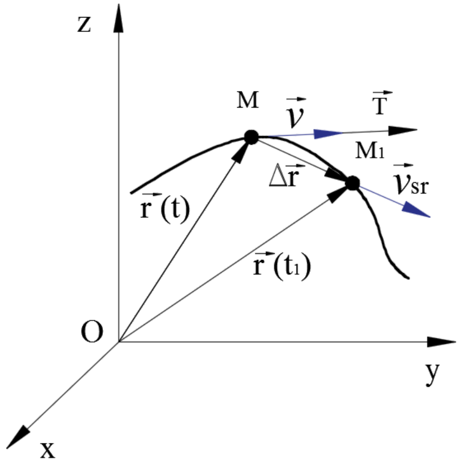
$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |s_i| = \int_{t1}^{t2} |ds|. \tag{2.11}$$

2.2. BRZINA TAČKE

Jedna od kinematičkih veličina, koja karakteriše kretanje, je i brzina tačke. Ovdje će biti prikazani načini određivanja brzine tačke pri različitim postupcima definisanja kretanja.

2.2.1. Vektorski postupak određivanja brzine tačke

Ako se kretanje tačke M određuje vektorskim postupkom, onda je kretanje tačke u potpunosti određeno ako je vektor položaja tačke M poznata funkcija vremena, odnosno $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Vektor brzine tačke karakteriše promjenu vektora položaja u svakom trenutku vremena.



sl.10.

Posmatrajmo dva položaja tačke na putanji, položaj M i M_1 (*sl.10*), koji odgovaraju vremenskim trenucima t i $t_1=t+\Delta t$ kretanja tačke. Veličina Δt je konačni vremenski interval u kome tačka pređe iz položaja M u položaj M_1, a vektor položaja se promijeni za $\Delta\vec{r}$. Veličina $\Delta\vec{r}$ naziva se vektorski priraštaj vektora položaja $\vec{r}$ tačke M u posmatranom vremenskom intervalu. <u>Vektor srednje brzine</u> $\vec{v}_{sr}$, definiše se kao odnos vektora priraštaja i njemu odgovarajućeg priraštaja vremena:

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{t_1-t} \tag{2.12}$$

Vektor srednje brzine ima isti pravac i smjer kao vektor $\Delta\vec{r}$, tj. usmjeren je u smjeru kretanja tačke. Srednja brzina tačke u nekom interval vremena karakteriše promjenu vektora položaja posmatrano za određeni interval vremena, tako da na osnovu srednje brzine ne možemo ništa zaključiti o načinu promjene položaja tačke unutar intervala Δt. Ukoliko je posmatrani interval vremena Δt manji, utoliko srednja brzina preciznije pokazuje promjenu položaja tačke u toku vremena.
Vektor brzine tačke $\vec{v}$, u datom trenutku vremena t, je veličina kojoj teži vektor srednje brzine tačke kada interval vremena Δt teži nuli, tj. jednak je prvom izvodu vektora položaja tačke po vremenu, tj.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \vec{v}_{sr} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \tag{2.13}$$

Pošto je vektor $\overrightarrow{v_{sr}}$ usmjeren duž vektora pomjeranja, to kada interval $\Delta t \to 0$ onda i $\Delta\vec{r} \to 0$, tj. tačka M_1 postaje beskonačno bliska tački M, odnosno u graničnom slučaju poklapa se sa tačkom M. Pravac vektora $\Delta\vec{r}$ teži pravcu vektora tangente $\vec{T}$ na putanju u tački M.

Iz ovog slijedi da, vektor brzine tačke $\vec{v}$, u datom trenutku vremena ima pravac tangente na trajektoriju u odgovarajućoj tački, a usmjeren je u smjeru kretanja tačke.

Vektor brzine tačke pri proizvoljnom kretanju karakteriše tokom vremena promjenu vektora položaja tačke po intezitetu, pravcu i smjeru. Intezitet vektora brzine $\vec{v}$, jednak je intezitetu prvog izvoda vektora položaja po vremenu,

$$|\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$$

a nije jednak,

$$|\vec{v}| \neq \frac{d|\vec{r}|}{dt}.$$

Pa tako recimo, pri kretanju tačke po kružnoj putanji, intezitet vektora položaja je $|\vec{r}| = const,$ pa je $\frac{d|\vec{r}|}{dt} = 0$. Međutim, kako se mijenja pravac i smjer vektora položaja onda je brzina tačke različita od nule.

Ako se tačka kreće tako da se vektor brzine mijenja po pravcu, onda tačka vrši krivolinijsko kretanje, a ako je vektor brzine tokom vremena konstantnog pravca, onda tačka vrši pravolinijsko kretanje.
Ako se tačka kreće tako da je vektor brzine konstantnog inteziteta, za takvo kretanje kažemo da je ravnomjerno. U suprotnom je kretanje promjenjivo.
Dimenzija kojom se izražava brzine je,

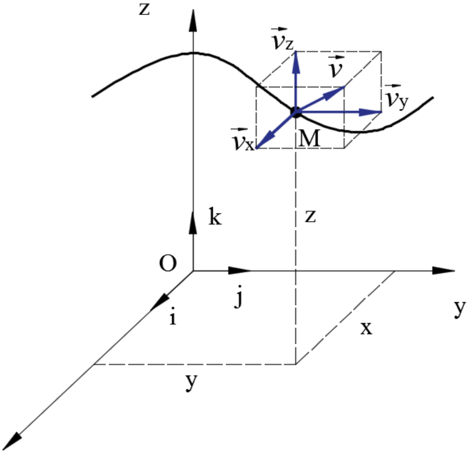
$$[v] = LT^{-1}$$

Jedinica, kojom se izražava intenzitet brzine tačke je odnos jedinice dužine i vremenske jedinice, tj. $\left[\frac{m}{s}\right]$.

2.2.2. Analitički (koordinatni) postupak određivanja brzine tačke

a) Brzina tačke u Dekartovim koordinatama

Neka je kretanje tačke *M* zadato u Dekartovim koordinatama *x(t), y(t) i z(t)*, tada položaj proizvoljne tačke *M* možemo napisati u vektorskom obliku $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.



sl.11.

Vektor brzine $\vec{v}$, tačke *M*, jednak je prvom izvodu vektora položaja po vremenu, a sobzirom da je vektor položaja izražen preko Dekartovih koordinata i imajući u vidu da su jedinični vektori konstantni i da je njihov izvod po vremenu jednak nuli, slijedi da je,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right),$$

odnosno,

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k} \tag{2.14}$$

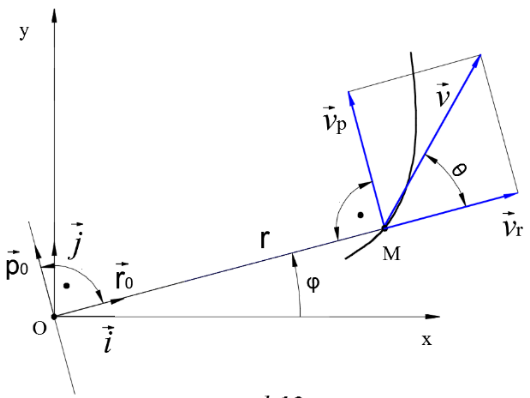
Sada, projekcije vektora brzine tačke, na ose nepokretnog Dekartovog koordinatnog sistema (*sl.11.*), možemo napisati u obliku,

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} \\ v_y &= \dot{y} \\ v_z &= \dot{z} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Intezitet vektora brzine tačke u Dekartovim koordinatama može se odrediti kao,

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \tag{2.16}$$

b) Brzina tačke u polarnim koordinatama



sl.12.

Da bismo odredili brzinu tačke *M* kada se ona kreće u ravni, preko polarnih koordinata $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, uvodimo u analizu jedinični vektor $\vec{r}_0$ usmjeren duž potega *r* i jedinični vektor $\vec{p}_0$ normalan na taj poteg (*sl.12.*).

Vektor položaja tačke M, možemo napisati kao $\vec{r} = r\,\vec{r}_0$.

Tada je, vektor brzine tačke M određen prvim izvodom vektora položaja tačke po vremenu i može se napisati u obliku,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{r}_0) = \frac{dr}{dt}\vec{r}_0 + r\frac{d\vec{r}_0}{dt} \tag{2.17}$$

Jedinični vektori $\vec{r}_0$ i $\vec{p}_0$ mijenjaju svoj pravac pri kretanju tačke M, te su i oni promjenjive veličine u vremenu. Da bi smo našli izvode tih jediničnih vektora, možemo ih izraziti preko jediničnih vektora $\vec{\imath}$ i $\vec{\jmath}$ nepokretnih osa Dekartovog koordinatnog sistema O_x i O_y i polarnog ugla φ, kao

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= \vec{\imath}cos\varphi + \vec{\jmath}sin\varphi \\ \vec{p}_0 &= -\vec{\imath}sin\varphi + \vec{\jmath}cos\varphi \end{aligned} \tag{2.18}$$

Izvodi po vremenu ovih jediničnih vektora su:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_0}{dt} &= (-\vec{\imath}sin\varphi + \vec{\jmath}cos\varphi)\frac{d\varphi}{dt} = \vec{p}_0\frac{d\varphi}{dt} = \vec{p}_0\dot{\varphi} \\ \frac{d\vec{p}_0}{dt} &= -(\vec{\imath}cos\varphi + \vec{\jmath}sin\varphi)\frac{d\varphi}{dt} = -\vec{r}_0\frac{d\varphi}{dt} = -\vec{r}_0\,\dot{\varphi} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Sada vektor brzine tačke ima oblik,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{r}_0) = \frac{dr}{dt}\vec{r}_0 + r\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\varphi}\vec{p}_0 = \vec{v}_r + \vec{v}_p \tag{2.20}$$

Odnosno, projekcije vektora brzine posmatrane tačke na ose polarnog koordinatnog sistema su,

$v_r = \dot{r}$ *– radijalna brzina tačke* (2.21)

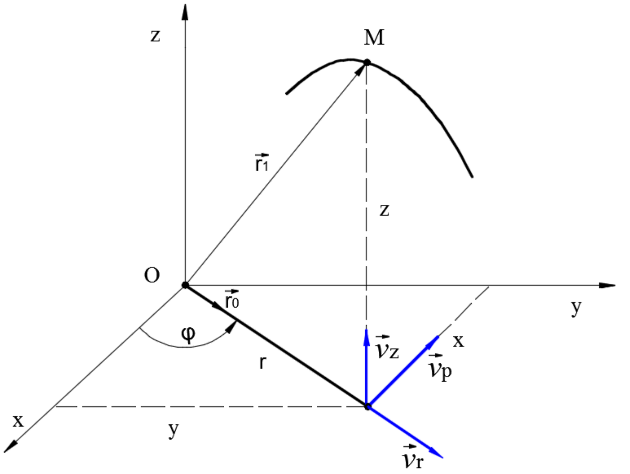
$v_p = r\dot{\varphi}$ *– poprečna (transverzalna, cirkularna) brzina tačke*

Intezitet brzine tačke M u polarnim koordinatama određen je sa:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} \tag{2.22}$$

c) Brzina tačke u polarno-cilindričnim koordinatama

Neka je kretanje tačke M zadato u polarno-cilindričnim koordinatama (r,φ,z) (*sl.13*).



sl.13.

Vektor položaja posmatrane tačke *M*, u ovom slučaju, možemo napisati kao,

$$\vec{r}_1 = r\vec{r}_0 + z\vec{k} \qquad (2.23)$$

Vektor brzine tačke M određen je prvim izvodom vektora položaja $\vec{r}_1$, odnosno,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{r}_0) + \frac{d}{dt}(z\vec{k}) \qquad (2.24)$$

Koristeći se izrazem (2.20), vektor brzine proizvoljne tačke tačke *M* u polarno-cilindričnim koordinatama, odnosno jednačinu (2.24), možemo napisati u obliku,

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\varphi}\vec{p}_0 + \dot{z}\vec{k} = \vec{v}_r + \vec{v}_p + \vec{v}_z \qquad (2.25)$$

Sada su projekcije vektora brzine posmatrane tačke, na ose polarno-cilindričnog koordinatnog sistema, određene sa:

$$v_r = \dot{r}$$
$$v_p = r\dot{\varphi} \qquad (2.26)$$
$$v_z = \dot{z}$$

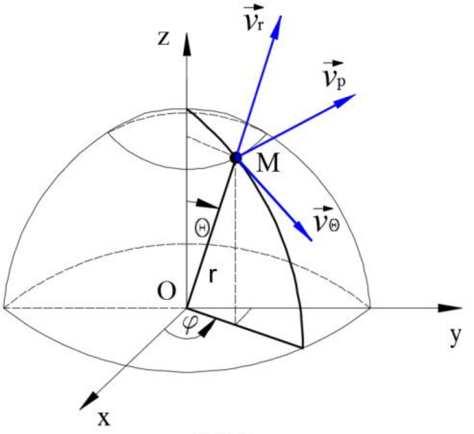
gdje su, v_r – *radijalna*, v_p – *poprečne (cirkularna, transverzalna)* i v_z – *aksijalna brzina tačke*.

Intenzitet vektora brzine tačke tačke *M*, u polarno-cilindričnim koordinatama, određen je kao

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2} \tag{2.27}$$

d) Brzina tačke u sfernim koordinatama

Neka je kretanje tačke *M* (*sl.14*) određeno u sfernim koordinatama (r,φ,θ), jednačinama kretanja (2.8).



sl.14.

Veza između sfernih i Dekartovih pravouglih koordinata određena je izrazima,

$$\begin{aligned} x &= rsin\theta cos\varphi \\ y &= rsin\theta sin\varphi \\ z &= rcos\theta \end{aligned} \tag{2.28}$$

gdje su, $r = r(t), \varphi = \varphi(t) \ i \ \theta = \theta(t)$, poznate funkcije vremena.

Kada nađemo prve izvode po vremenu jednačina (2.28), dobijemo,

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = \dot{r}sin\theta cos\varphi + rcos\theta cos\varphi - r\dot{\varphi}sin\theta sin\varphi \\ v_y &= \dot{y} = \dot{r}sin\theta sin\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}cos\theta sin\varphi - r\dot{\theta}sin\theta cos\varphi \\ v_z &= \dot{z} = \dot{r}cos\theta - r\dot{\theta}sin\theta \end{aligned} \tag{2.29}$$

Uvrštavanjem vrijednosti (2.29) u formulu za ukupnu brzinu tačke $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$, može se pokazati da je, intenzitet brzine tačke izražen preko sfernih koordinata (*sl.14*), određen sa

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2 + v_m^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi}sin\theta)^2 + (r\dot{\theta})^2} \tag{2.30}$$

gdje su projekcije vektora brzine, na ose sfernog koordinatnog sistema,

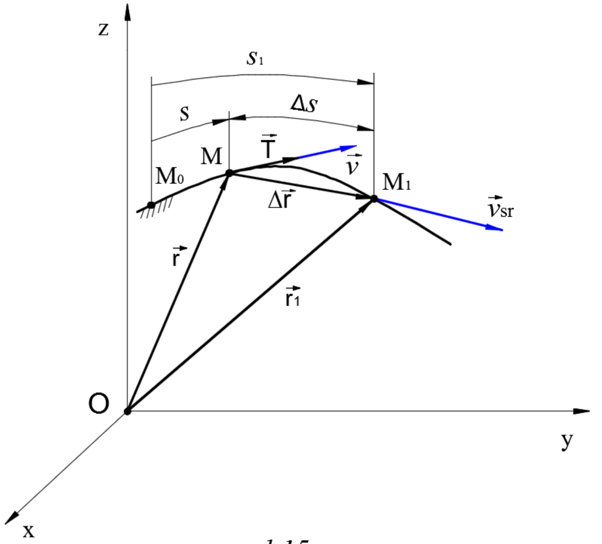
$v_r = \dot{r}$ - *radijalna brzina tačke,*

$v_p = r\dot{\varphi}sin\theta$ – *poprečna (cirkularna, transverzalna) brzina tačke,*

$v_m = r\dot{\theta}$ – *meridijalna brzina tačke.*

2.2.3. Brzina tačke u prirodnom postupku određivanja kretanja

Za određivanje brzine tačke u prirodnom postupku određivanja kretanja, potrebno je poznavati putanju tačke i zakon kretanja tačke po putanji $s = s(t)$ (*sl.15*).



sl.15.

Uočimo dva uzastopna položaja tačke na putanji M i M_1, koji odgovaraju trenucima vremena t i t_1. Vrijednosti krivolinijske koordinate u tim tačkama su s i s_1, odnosno vektori položaja tačke su $\vec{r}$ i $\vec{r_1} = \vec{r} + \Delta\vec{r}$. Po definiciji, vektor srednje brzine tačke određen je izrazom,

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{2.31}$$

a vektor brzine tačke M, odnosno vektor brzine tačke u datom trenutku vremena je,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta s\to 0}}\left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} \tag{2.32}$$

Kako je $|\Delta\vec{r}|$ dužina duži $\overline{MM_1}$, a Δs ekvivalentni luk $\widehat{MM_1}$, to je

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$$

Iz predhodnog slijedi da je $\frac{d\vec{r}}{ds}$ jedinični vektor. U graničnom položaju kada $\Delta s \to 0$, tačka M se poklapa sa tačkom M_1, te je vektor $\frac{d\vec{r}}{ds}$ jedinični vektor tangente i usmjeren je u stranu porasta krivolinijske koordinate s, pa je moguće napisati

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T} \tag{2.33}$$

gdje je $\vec{T}$ jedinični vektor tangente.

Koristeći izraze (2.32) i (2.33), brzinu tačke u prirodnom postupku definisanja kretanja možemo napisati u obliku

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{T} = \dot{s}\vec{T} \tag{2.34}$$

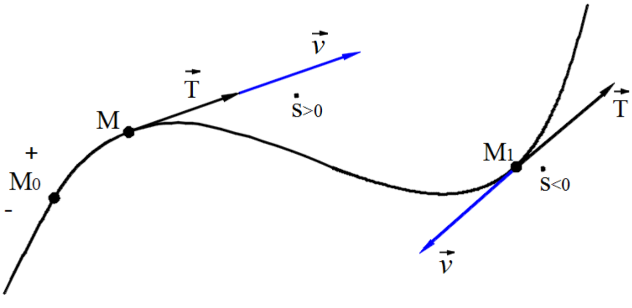
Intezitet brzine tačke određen je apsolutnom vrijednošću prvog izvoda krivolinijske koordinate *s* po vremenu:

$$|\vec{v}| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

pa je vektor brzine tačke moguće napisati i kao,

$$\vec{v} = v_T\vec{T} = \frac{ds}{dt}\vec{T} = \dot{s}\,\vec{T} \tag{2.34.a}$$

Projekcija vektora brzine tačke $\vec{v}$ na pravac tangente na putanju tačke, jednaka je prvom izvodu po vremenu krivolinijske koordinate i ima znak plus ili minus u zavisnosti od smjera kretanja tačke (*sl.16*).



sl.16.

Ako je intezitet brzine tačke poznata funkcija vremena $v = v(t)$, tada je moguće odrediti krivolinijsku koordinatu *s*, kao

$$s = \int_{t_0}^{t} v(t)dt + s_0 \tag{2.35}$$

gdje je s_0 vrijednost krivolinijske kordinate u početnom trenutku vremena $t_0 = 0$.

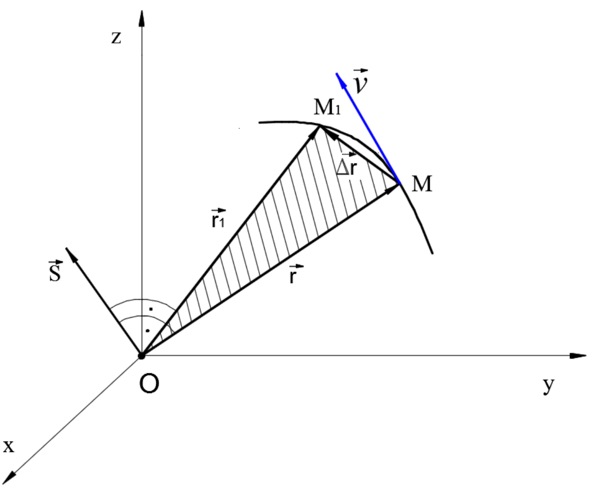
Ovdje treba razlikovati vrijednost krivolinijske koordinate s u datom trenutku vremena t i pređeni put tačke u vremenskom intervalu $(0,t)$. Pošto u opštem slučaju tačka može da mijenja smjer kretanja po trajektoriji, pređeni put tačke u posmatranom intervalu vremena $(0,t)$ određuje se kao zbir duži krivolinijske koordinate s koje tačka prelazi ne mijenjajući svoj smjer. Tako da se pređeni put tačke S_p može odrediti izrazom,

$$S_p = |s_1 - s_0| + |s_2 - s_1| + \cdots + |s - s_n| \tag{2.36}$$

gje su $s_1, s_2, \ldots\ldots, s_n$ vrijednosti krivolinijske koordinate s u trenucima vremena $t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n$, u kojima brzina tačke mijenja znak.

2.2.4. Sektorska brzina tačke

Neka je kretanje tačke M zadato vektorom položaja $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Pri kretanju tačke vektor položaja $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ opisuje određenu površinu sa vrhom u tački O (*sl.17.*). Kao i pri definisanju brzine tačke u predhodnim razmatranjima, uočimo dva bliska položaja tačke M: položaj u kome se tačka nađe u trenutku t, koji je određen vektorom položaja $\vec{r}(t)$ i položaj u kome se tačka nađe u trenutku $t_1 = t + \Delta t$ i koji je određen vektorom položaja $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1) = \vec{r} + \Delta\vec{r}$.



sl.17.

Kako je interval vremena Δt mala veličina, može se smatrati da je površina sektora ΔA, koju za to vrijeme "prebriše" vektor položaja $\vec{r}$, ravna. Ona može da se predstavi vektorom, čiji je intenzitet sa dovoljnom tačnošću, jednak površini trougla ΔOMM_1.

Koristeći osobine vektorskog proizvoda dva vektora, može se pisati $\Delta\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \Delta\vec{r})$. Srednja sektorska brzina definiše se kao,

$$\vec{S}_{sr} = \frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}).$$

Graničnim prelazom, kada $\Delta t \to 0$ dobije se sektorska brzina tačke u datom trenutku vremena, tj.:

$$\vec{S} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,\vec{r} \times \vec{v} \qquad (2.37)$$

gdje je $\vec{r}$ vektor položaja tačke, a $\vec{v}$ brzina tačke M.

Intenzitet sektorske brzine, jednak je intenzitetu vektorskog proizvoda, određen relacijom (2.37), brojno je jednak polovini površine paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{r}$ i $\vec{v}$, odnosno

$$|\vec{S}| = \frac{1}{2}|\vec{r}| \cdot |\vec{v}| sin\,\measuredangle(\vec{r},\vec{v}) \qquad (2.38)$$

Zamjenjujući u formulu (2.37) izraz za vektor brzine tačke, koji možemo napisati kao

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

vektor sektorske brzine, može se izraziti kao

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}, \qquad (2.39)$$

gdje je

$$d\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r} \times d\vec{r}.$$

Prema tome, vektor sektorske brzine $\vec{S}$, upravan je na ravan vektora $\vec{r}$ i $d\vec{r}$, a intenzitet mu je jednak polovini površine paralelograma konstruisanog nad vektorom položaja $\vec{r}$ i vektorom pomijeranja $d\vec{r}$ tačke (*sl.17*). Na osnovu ovoga, slijedi da je sektorska brzina ustvari brzina promjene površine u jedinici vremena koju opisuje vektor položaja $\vec{r}$ pri kretanju tačke. Jedinica kojom se izražava intenzitet sektorske brzine je $\left[\frac{m^2}{s}\right]$.

Ako vektorski proizvod vektora položaja $\vec{r}$ i vektora brzine $\vec{v}$ napišemo u obliku determinante i izrazimo preko Dekartovih pravouglih koordinata, odnosno izvoda tih koordinata po vremenu, dobićemo vektor sektorske brzine u obliku:

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}, \text{ odnosno}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2}(y\dot{z} - z\dot{y})\vec{\imath} + \frac{1}{2}(z\dot{x} - x\dot{z})\vec{\jmath} + \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})\vec{k} \tag{2.40}$$

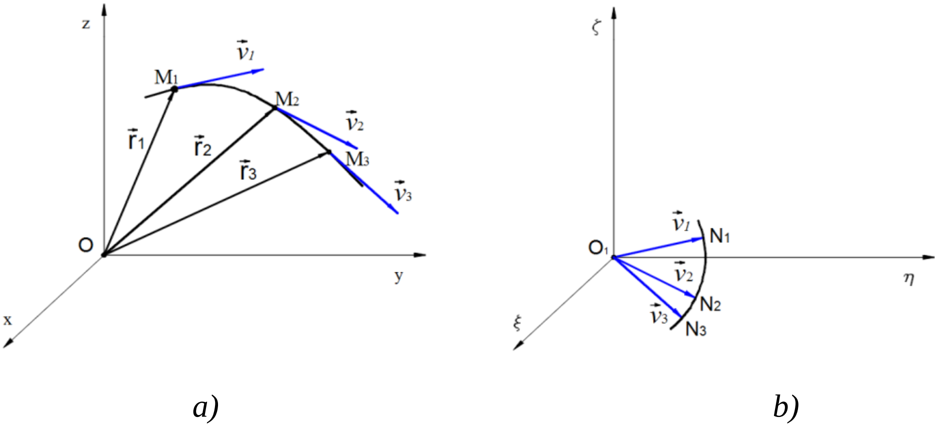
Iz izraza (2.40) jasno se uočavaju i projekcije vektora $\vec{S}$ na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema.

Takođe, za slučaj kretanja tačke u ravni, pošto je sektorska brzina u stvari brzina promjene površine koju opisuje poteg pri kretanju tačke, intenzitet sektorske brzine može se iskazati i kao,

$$S = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} \tag{2.41}$$

2.2.5. Hodograf vektora brzine tačke

Posmatrajmo proizvoljno krivolinijsko kretanje tačke M i uočimo nekoliko položaja tačke na putanji sa odgovarajućim vektorima brzine tačke (*sl. 18.a*). Ako sve vektore brzina pokretne tačke M prenesemo iz jedne nepokretne tačke O_1, tada geometrijsko mjesto krajeva, tačke $N_1, N_2, N_3 \ldots, N_n$, vektora brzina određuje krivu koja se naziva hodograf vektora brzina pokretne tačke. (*sl. 18b*).



sl.18.

Na osnovu konstruisanog hodografa vektora brzine pokretne tačke moguće je izmjeriti promjenu pravca i intenziteta vektora brzine pokretne tačke, a isto tako zaključiti o karakteru kretanja tačke. Na primjer, ako se tačka kreće pravolinijski konstantnom brzinom, hodograf brzine tačke je samo tačka, a ako se tačka kreće kostantnom brzinom po ravnoj krivoj, hodograf brzine je krug sa polom u središtu kruga.

Konstrukciju hodografa vektora brzine pokretne tačke moguće je izvršiti i na taj način što se iz izraza za projekcije vektora brzine na Dekartove ose, jednačine (2.15), eliminiše vrijeme t i tako dobijena kriva linija predstavlja hodograf vektora brzine.

Na osnovu hodografa vektora brzine pokretne tačke, pošto su ose $O_{1\xi\eta\zeta}$ izabrane tako da su paralelne osama O_{xyz} (*sl.18*), to su koordinate tačke N na hodografu brzine jednake projekcijama vektora brzine na ose Dekartovog koordinatnog sistema, tj.

$$\left| \begin{array}{l} \xi = \dot{f}_1(t) = v_x \\ \eta = \dot{f}_2(t) = v_y \\ \zeta = \dot{f}_3(t) = v_z \end{array} \right| \tag{2.42}$$

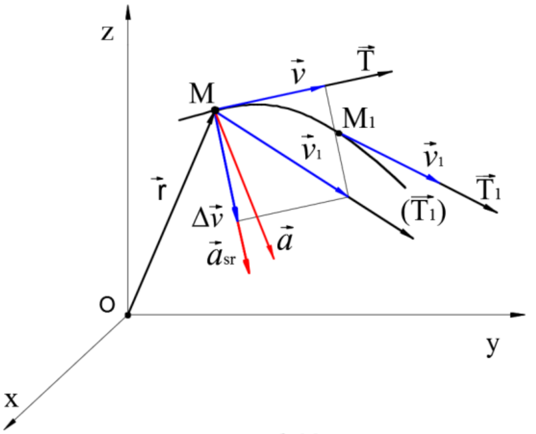
pa se ove jednačine mogu razmatrati kao parametarske jednačine hodografa vektora brzine pokretne tačke.

2.3. UBRZANJE TAČKE

Kinematička veličina koja karakteriše promjenu brzine tačke tokom kretanja naziva se ubrzanje tačke. Ovdje će biti prikazani postupci određivanje ubrzanja tačke pri različitim postupcima definisanja kretanja.

2.3.1. Vektorski postupak određivanja ubrzanja tačke

Vektor ubrzanja $\vec{a}$ karakteriše promjenu vektora brzine $\vec{v}$ tačke M u svakom trenutku vremena.



sl.19.

Neka se u trenutku vremena t tačka nalazi u položaju M, koji je određen vektorom položaja $\vec{r}$ i neka ima brzinu $\vec{v}$, a u trenutku vremena $t_1 = t + \Delta t$ tačka je u položaju M_1 i ima brzinu $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v}$ (*sl.19*). Ovo znači da je, u vremenskom intervalu Δt, vektor brzine tačke dobio vektorski priraštaj $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$, koji karakteriše promjenu vektora brzine po pravcu i intezitetu. Ako u tački M prenesemo paralelno vektor brzine $\vec{v}_1$ i konstruišemo paralelogram u kojem je vektor $\vec{v}_1$ dijagonala a jedna stranica paralelograma je $\vec{v}$, onda je druga stranica vektorski priraštaj $\Delta\vec{v}$ brzine $\vec{v}$. Dijeljenjem vektora $\Delta\vec{v}$ sa intervalom vremena Δt, dobićemo srednje ubrzanje tačke za interval vremena Δt, što možemo napisati kao

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{t_1-t} \qquad (2.43)$$

Vektor srednjeg ubrzanja tačke, utoliko tačnije odražava promjenu vektora brzine, ukoliko je manji interval vremena Δt.

Vektor ubrzanja tačke, u datom trenutku vremena za granični slučaj, dobijamo kada $\Delta t \to 0$, kao

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{sr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \tag{2.44}$$

Kako je vektor brzine tačke jednak izvodu po vremenu vektora položaja tačke, može se napisati da je vektor ubrzanja tačke jednak

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{2.45}$$

Vektor ubrzanja tačke u datom trenutku vremena jednak je prvom izvodu vektora brzine tačke po vremenu, ili drugom izvodu vektora položaja tačke po vremenu.

U opštem slučaju krivolinijskog kretanja tačke vektor ubrzanja karakteriše promjenu vektora brzine tačke tokom vremena po intezitetu, pravcu i smjeru. Iz ovog slijedi da je ubrzanje tačke jednako nuli samo kada je brzina tačke tokom vremena konstantna po pravcu i intezitetu, tj.u slučaju ravnomjernog pravolinijskog kretanja.

Intezitet vektora ubrzanja jednak je intezitetu izvoda vektora brzine po vremenu:

$$|\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| \tag{2.46}$$

a nije jednak:

$$|\vec{a}| \neq \frac{d|\vec{v}|}{dt}.$$

Upravo ovo možemo uočiti na primjeru krivolinijskog kretanja, kada je brzina tačke konstantana po intezitetu $|\vec{v}| = cons.$ pa je $\frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0$. Međutim pošto se vektor brzine mijenja po pravcu u ovom slučaju je ubrzanje tačke različito od nule.

Na osnovu definicije ubrzanja slijede i njegove dimenzije:

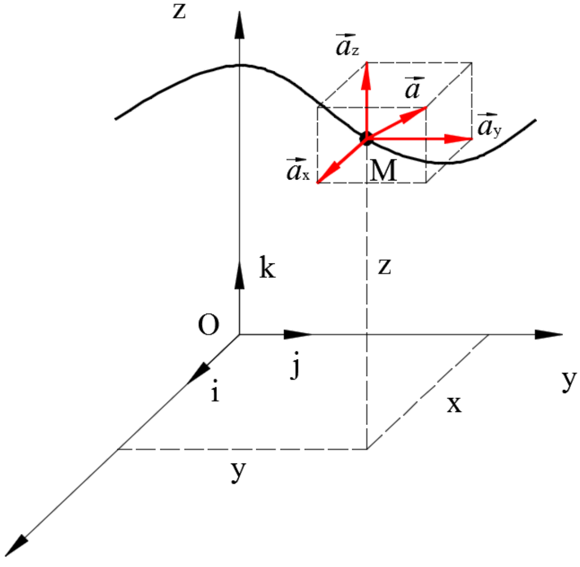
$$[a] = LT^{-2}$$

Jedinica, kojom se izražava intenzitet ubrzanja tačke je odnos jedinice dužine i kvadrata vremenske jedinice, tj. $\left[\frac{m}{s^2}\right]$.

2.3.2. Analitički (koordinatni) način određivanja ubrzanja tačke

a) Određivanje ubrzanja tačke u Dekartovim koordinatama

Neka je kretanje tačke *M* zadato u Dekartovim koordinatama *x=x(t), y=y(t) i z=z(t)* (*sl.20*). Ako vektor položaja proizvoljne tačke *M* napišemo u vektorskom obliku $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$, tada je vektor brzine tačke definisan kao prvi izvod po vremenu vektora položaja, odnosno $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$.



sl.20.

Polazeći od definicije za ubrzanje tačke, možemo napisati,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Dvostrukim diferenciranjem vektora položaja $\vec{r}$ po vremenu dobićemo,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}\right) = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k} \qquad (2.47)$$

gdje su $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ *i* $\vec{k}$ jedinični vektori Dekartovih koorinatnih osa.

Projekcije vektora ubrazanja tačke na ose nepokretnog pravouglog Dekartovog koordinatnog sistema jednake su drugim izvodima po vremenu odgovarajućih koordinata pokretne tačke, što možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} \\ a_y &= \ddot{y} \qquad (2.48) \\ a_z &= \ddot{z} \end{aligned}$$

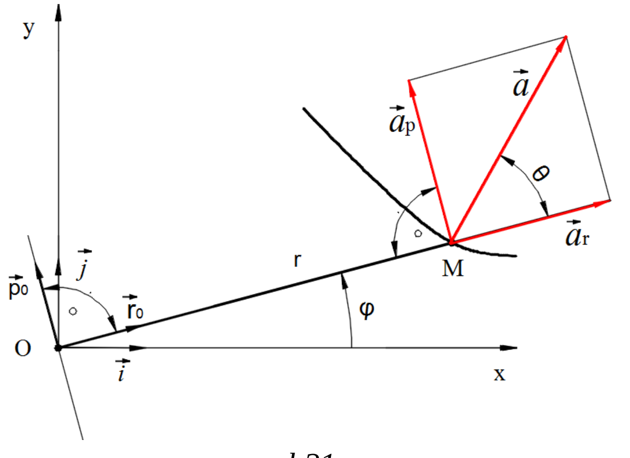
Intezitet vekrora ubrzanja tačke u Dekartovim koordinatama, određen je izrazom,

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

b) Ubrzanje tačke u polarnim koordinatama

Neka je kretanje tačke u ravni određeno polarnim koordinatama $r = r(t)\ i\ \varphi = \varphi(t)$. Da bi odredili ubrzanje tačke u polarnim koordinatama, pođimo od izraza za vektor brzine tačke izražen u polarnim koordinatama,

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{r_0} + r\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{p_0}.$$



sl.21.

Difrenciranjem vektora brzine $\vec{v}$ po vremenu, dobićemo vektor ubrzanja tačke u obliku

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\overrightarrow{r_0} + r\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{p_0}\right)$$

odnosno,

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\overrightarrow{r_0} + \frac{dr}{dt}\frac{d\overrightarrow{r_0}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{p_0} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\overrightarrow{p_0} + r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\overrightarrow{p_0}}{dt} \qquad (2.49)$$

Koristeći se formulom (2.19), prema kojoj su izvodi jediničnih vektora dati sa,

$$\frac{d\overrightarrow{r_0}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{p_0}\,;\quad \frac{d\overrightarrow{p_0}}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{r_0}$$

jednačina (2.49) može se napisati u obliku,

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\overrightarrow{r_0} + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{p_0} + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{p_0} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\overrightarrow{p_0} - r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{r_0}$$

odnosno,

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\overrightarrow{r_0} + \left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\overrightarrow{p_0}$$

Sada se vektor ubrzanja tačke u polarnim koordinatama može napisati u obliku,

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{r_0} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\overrightarrow{p_0} = \vec{a}_r + \vec{a}_p \tag{2.50}$$

Projekcija vektora ubrzanja, na osu duž potega *r*, jednaka je

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \tag{2.51}$$

i naziva se *radijalno ubrzanje* tačke.
Projekcija vektora ubrzanja, usmjerena upravno na poteg *r*, jednaka je

$$a_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) \tag{2.52}$$

i naziva se *poprečno, cirkularno ili obrtno ubrzanje* tačke (*sl.21*).
Intezitet vektora ubrzanja tačke u polarnim koordinatama određen je sa,

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_r^2 + a_p^2} \tag{2.53}$$

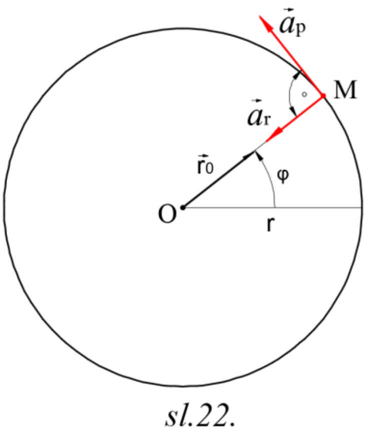
Razmotrimo poseban slučaj određivanja brzine i ubrzanja u polarnim koordinatama ako se tačka kreće po kružnoj putanji potega *r* (sl.22).

Ako položaj tačke mjerimo od centra kruga, onda je *r=const.*, pa je

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0$$

U ovom slučaju, radijalna brzina tačke jednaka je nuli, odnosno tada je

$$v_r = \frac{dr}{dt} = 0$$



sl.22.

a brzina tačke jednaka je poprečnoj komponenti:

$$\vec{v} = v_p\overrightarrow{p_0} = r\dot{\varphi}\overrightarrow{p_0}$$

Koristeći se formulom (2.50), za slučaj da se tačka kreće po kružnoj putanji *r=const.*, vektor ubrzanja tačke je:

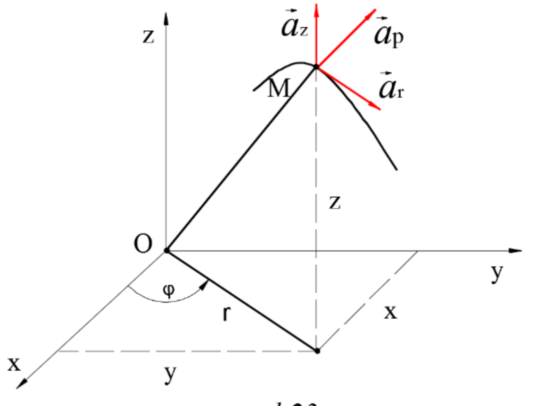
$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p = -r\dot{\varphi}^2\overrightarrow{r_0} + r\ddot{\varphi}\overrightarrow{p_0}$$

odnosno, inteziteti vektora radijalne i poprečne komponente ubrzanja pri ovom kretanju su,

$$|\vec{a}_r| = a_r = r\dot{\varphi}^2$$
$$|\vec{a}_p| = a_p = r\ddot{\varphi}$$

Radijalna komponenta ubrzanja $\vec{a}_r$ usmjerena je ka centru *O*, dok je poprečna komponenta ubrzanja $\vec{a}_p$ usmjerena duž tangente na kružnu putanju (*sl.22*).

c) Ubrzanje tačke u polarno-cilindričnim koordinatama



sl.23.

Neka je kretanje tačke u prostoru određeno polarno-cilindričnim koordinatama,

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t)$$

Ubrzanje tačke u polarno-cilindričnim koordinatama možemo odrediti ako izrazu za ubrzanje tačke u polarnim koordinatama, određeno jednačinama (2.51) i (2.52), dodamo i projekciju ubrzanja po osi *Oz*, tj. $a_z = \ddot{z}$. Na taj način, projekcije vektora ubrazanja tačke u polarno-cilindričnim koodrinatama možemo napisati kao, (*sl.23*)

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$
$$a_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \qquad (2.54)$$
$$a_z = \ddot{z}$$

Odnosno, vektor ubzanje tačke, u polarno-cilindričnim koordinatama, može se napisati u obliku

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{r_0} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\overrightarrow{p_0} + \ddot{z}\vec{k} \qquad (2.55)$$

Intenzitet vektora ubrzanja, u polarno-cilindričnim koordinatama, određen je izrazom,

$$a = \sqrt{{a_r}^2 + {a_p}^2 + {a_z}^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2} \qquad (2.56)$$

Do ovog izraza za ubrzanje tačke, u polarno cilindričnim koordinatama, mogli smo doći i koristeći vezu tih koordinata sa Dekartovim koordinatama. U tom slučaju, možemo pisati

$$x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \\ z = z \tag{2.57}$$

odnosno,

$$v_x = \dot{x} = \dot{r}cos\varphi - r\dot{\varphi}sin\varphi$$
$$v_y = \dot{y} = \dot{r}cos\varphi + r\dot{\varphi}cos\varphi$$
$$v_z = \dot{z}$$

pa su tada projekcije ubrzanja tačke,

$$a_x = \ddot{x} = \ddot{r}cos\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}cos\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}sin\varphi - r\ddot{\varphi}sin\varphi - r\dot{\varphi}^2cos\varphi \\ a_y = \ddot{y} = \ddot{r}sin\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}cos\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}sin\varphi - r\ddot{\varphi}cos\varphi - r\dot{\varphi}^2sin\varphi \\ a_z = \ddot{z} \tag{2.58}$$

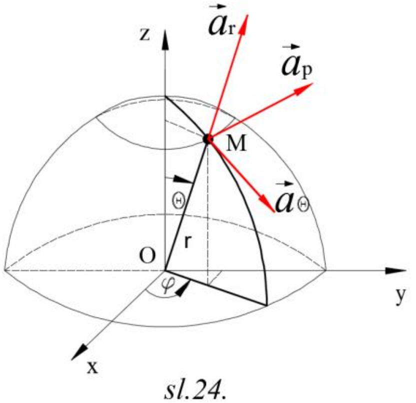
Intenzitet ubrzanja tačke određen je sa $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y} + \ddot{z}}$, odnosno,

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2} = \sqrt{{a_r}^2 + {a_p}^2 + {a_z}^2}$$

što je ustvari indetično sa izrazom (2.56).

d) Ubrzanje tačke u sfernim koordinatama

Neka je kretanje tačke zadato u sfernim koordinatama: $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\theta = \theta(t)$. Ubrzanje tačke u sfernim koordinatama, možemo odrediti, koristeći vezu ovih koordinata sa Dekartovim pravouglim koordinatama.



sl.24.

Polazeći od veze između Dekartovih pravougaonih i sfernih koorinata,

$$x = rsin\theta cos\varphi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = rcos\theta \tag{2.59}$$

Dvostrukim diferenciranjem ovih jednačina i zamjenom u formulu

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y} + \ddot{z}},$$

možemo odrediti intenzitet ubrzanja tačke izražen preko sfernih koordinata, kao:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_p^2 + a_m^2} \tag{2.60}$$

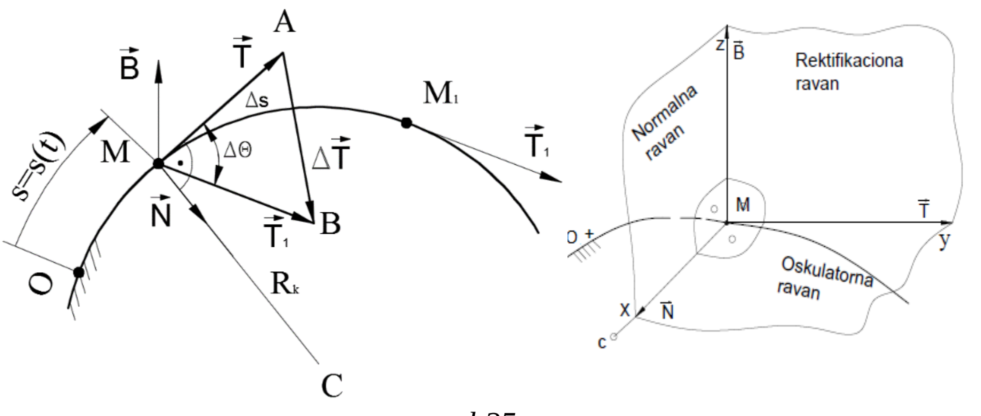
Može se pokazati da su projekcije vektora ubrzanja posmatrane tačke, na ose sfernog koordinatnog sistema, određene kao, (*sl.24*)

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\varphi^2 sin\theta - r\dot{\theta}^2 && \textit{– radijalno ubrzanje} \\ a_p &= r\ddot{\theta} + 2r\theta - r\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta && \textit{–poprečno(cirkularno)ubrzanje} \\ a_m &= \ddot{r}sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta && \textit{- meridijalno ubrzanje} \end{aligned} \tag{2.61}$$

2.3.3. Prirodni način određivanja ubrzanja tačke

Neka je poznata putanja tačke po kojoj se kreće tačka *M* (*sl.25*). Uočimo dva bliska položaja tačke M: položaj u kome se tačka nađe u trenutku *t*, koji je određen lučnom koordinatom $s = s(t) = \widehat{OM}$, čiji je jedinični vektor tangente na putanju $\vec{T}$ i položaj u kome se tačka nađe u trenutku t_1, koji je određen lučnom koordinatom $s_1 = \widehat{OM_1} = s + \Delta s$, čiji je jedinični vektor $\vec{T_1} = \vec{T} + \Delta\vec{T}$. Granični položaj ravni koju formiraju ova dva vektora, kada tačka M_1 teži tački M, naziva se <u>oskulatorna ravan</u> prirodnog trijedra u tački *M* prostorne krive. Upravno na jedinični vektor tangente $\vec{T}$ nalazi se <u>normalna ravan</u> prirodnog trijedra u tački *M*. Presjek oskulatorne i normalne ravni određuje pravac glavne normale čije je jedinični vektor $\vec{N}$, koji je usmjeren na konkavnu stranu krive. Upravno na ove dvije ravni nalazi se <u>tangencijonalna (rektrifikaciona) ravan</u> prirodnog trijedra. Presjek normalne i tangencijonalne ravni određuje pravac binormale čije je jedinični vektor $\vec{B}$, (*sl.25*).

Prema tome, pravougli koordinatni sistem određen jediničnim vektorima $\vec{T}, \vec{N}\ i\ \vec{B}$, obrazuje prirodni trijedar kunstruisan u tački *M* i svakom položaju tačke na trajektoriji odgovara poseban prirodni trijedar.



sl.25.

Da bismo odredili projekcije vektora ubrzanja tačke na koordinatne ose prirodnog trijedra, pođimo od izraza za brzinu tačke u prirodnim koordinatama,

$$\vec{v} = v_T\,\vec{T}$$

gdje je $v_T = \frac{ds}{dt}$, pri čemu je krivolinijska koordinata $s = s(t)$ poznata funkcija vremena.

Diferenciranjem vektora brzine po vremenu, vodeći računa da su veličine v i $\vec{T}$ promjenjive funkcije vremena, dobićemo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\vec{T}\right) = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt} \qquad (2.62)$$

Dakle, vektor ubrzanja tačke određen je vektorskim zbirom dvije komponente ubrzanja, jedna je usmjerena duž tangente $\vec{T}$ na putanju tačke a druga komponenta ubrzanja ima pravac vektora $\frac{d\vec{T}}{dt}$.

Pravac vektora $\frac{d\vec{T}}{dt}$ normalan je na vektor $\vec{T}$, što leži u činjenici da je skalarni proizvod vektora $\frac{d\vec{T}}{dt}$ i $\vec{T}$ jednak nuli, odnosno

$$2\frac{d\vec{T}}{dt}\cdot\vec{T} = \frac{d}{dt}\left(\vec{T}\cdot\vec{T}\right) = 0$$

Imajući u vidu ovu činjenicu i znajući da pri kretanju tačke vektor $\vec{T}$ skreće ka konkavnoj strani, tako da je pravac vektora $\frac{d\vec{T}}{dt}$ u pravcu normale $\vec{N}$, pa možemo pisati

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right| \vec{N} \tag{2.63}$$

Da bismo odredili intenzitet izvoda vektora $\frac{d\vec{T}}{dt}$, posmatrajmo vektorski priraštaj $\Delta\vec{T}$ jediničnih vektora $\vec{T}$ i $\vec{T_1}$ (*sl.25*).

Ugao $\Delta\theta$ između jediničnih vektora $\vec{T}$ i $\vec{T_1}$ tangenti na putanju u dvjema bliskim tačkama M i M_1 naziva se ugao zakrivljenja ili ugao kontigencije. Odnos ugla zakrivljenja $\Delta\theta$ i odgovarajućeg luka $\widehat{MM_1} = \Delta s$, označimo sa K_{sr}, nazivamo srednjom krivinom krive na dijelu $\widehat{MM_1}$,

$$K_{sr} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \tag{2.64}$$

Granična vrijednost srednje krivine krive je,

$$\lim_{\Delta s \to 0} K_{sr} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = K \tag{2.65}$$

naziva se <u>krivina krive u datoj tački.</u> Recipročna vrijednost krivine krive

$$R_k = \frac{1}{K} \tag{2.66}$$

naziva se <u>poluprečnik krivine krive</u> u datoj tački. Duž $\overline{MC} = R_k$ nanijeta na glavnoj normali u konkavnu stranu putanje određuje tačku C koja se naziva <u>centar krivine krive</u>.

Intenzitet vektora $\Delta\vec{T}$, iz jednakokrakog trougla ΔMAB, može se napisati u obliku

$$\left|\Delta\vec{T}\right| = \overline{\overrightarrow{AB}} = 2\left|\vec{T}\right| sin\frac{\Delta\theta}{2} = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2} \tag{2.67}$$

imajuću u vidu da je intenzitet jediničnog vektora $\left|\vec{T}\right| = \left|\vec{T_1}\right| = 1$.

Ako obrazujemo količnik intenziteta vektora $\Delta\vec{T}$ i intervala vremena Δt,

$$\frac{|\Delta\vec{T}|}{\Delta t} = 2\,\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t} = 2\,\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\,\frac{\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t}$$

i kada pređemo na graničnu vrijednost, dobićemo

$$\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right| = 2\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{2\Delta t}\,.$$

Kako je,

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} = 1$$

slijedi da je,

$$\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right| = \frac{d\theta}{dt}. \tag{2.68}$$

Koristeći se formulama (2.65) i (2.66), predhodni izraz se može napisati u obliku,

$$\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right| = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\frac{1}{R_k} = \frac{v}{R_k} \tag{2.69}$$

odnosno, konačno se dobije da je:

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|\vec{N} = \frac{v}{R_k}\vec{N} \tag{2.70}$$

Uvrštavanjem vrijednosti (2.70) u jednačinu (2.62), dobijamo vektor ubrzanja tačke, u prirodnom postupku definisanja kretanja, kao:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R_k}\vec{N} \tag{2.71}$$

Prema tome, *vektor ubrzanja tačke u prirodnom postupku definisanja kretanja, određen je vektorskim zbirom dvije komponente ubrzanja, od kojih je jedna usmjerena duž tangente na putanju tačke, a druga komponenta duž glavne normale.*

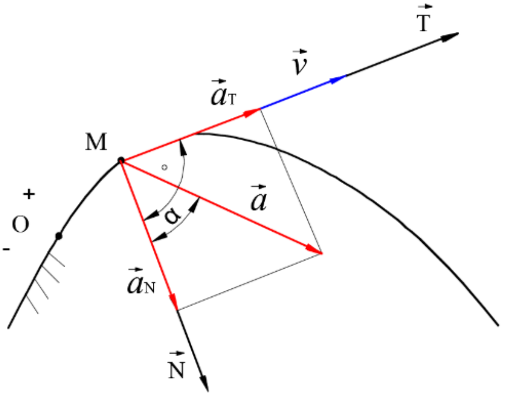
Takođe možemo zapaziti da, vektor ubrzanja tačke $\vec{a}$ leži u ravni vektora $\vec{T}$ i $\vec{N}$, tj. u oskulatornoj ravni, pa je projekcija ubrzanja na pravac binormale jednaka nuli, odnosno $a_B = 0$.

Projekcija vektora ubrzanja (*sl.26.*), usmjerena duž tangente, naziva se tangencijalno (tangentno) ubrzanje tačke, i ono je jednako:

$$a_T = \frac{dv_T}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \tag{2.72}$$

a projekcija vektora ubrzanja usmjerena duž normale, naziva se normalno ubrzanje tačke, i ono je jednako:

$$a_N = \frac{{v_T}^2}{R_k} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{1}{R_k} = \frac{\dot{s}^2}{R_k} \tag{2.73}$$



sl.26.

Tangencijalno ubrzanje karakteriše promjenu brzine tačke po intezitetu, a normalno ubrzanje karakteriše promjenu pravca vektora brzine.
Kada je poznato tangentno i normalno ubrzanje tačke, ondaje intenzitet ubrzanja određen obrascem,

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R_k}\right)^2} \tag{2.74}$$

Ugao koji vektor ubrzanja $\vec{a}$ gradi sa pravcem glavne normale, određuje se formulom

$$tg\ \alpha = \frac{|a_T|}{a_N}. \tag{2.75}$$

Razmotrimo poseban slučaj kretanja tačke po kružnoj putanji poluprečnika *r* (*sl.27*).

Pri kretanju tačke po kružnici, prirast lučne koordinate ds koji opiše pokretna tačka može se iskazati proizvodom poluprečnika *r* kružnice i prirasta ugla $d\varphi$ koji je u opštem slučaju funkcija vremena $\varphi = \varphi(t)$, kao

$$ds = r\ d\varphi$$

odnosno, vrijednost krivolinijske koordinate *s* u ovom slučaju je,

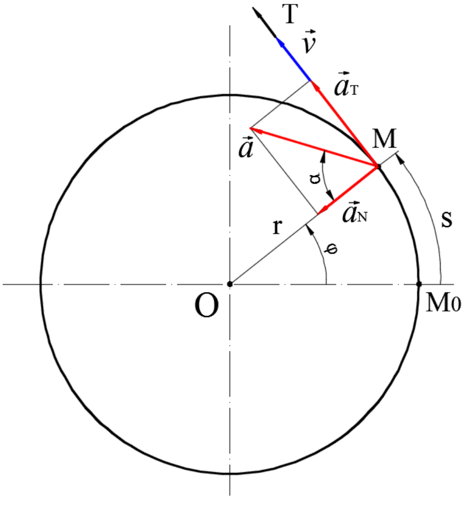
$$s = r\ \varphi.$$

Kako je poluprečnik zakrivljenosti kružnice $r = const$, onda je projekcija vektora brzine na tangentu jednaka,

$$v_T = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}$$

Vektor ubrzanja tačke je,

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N} = \ddot{s}\vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{r}\vec{N} = r\ddot{\varphi}\vec{T} + r\dot{\varphi}^2\vec{N}.$$

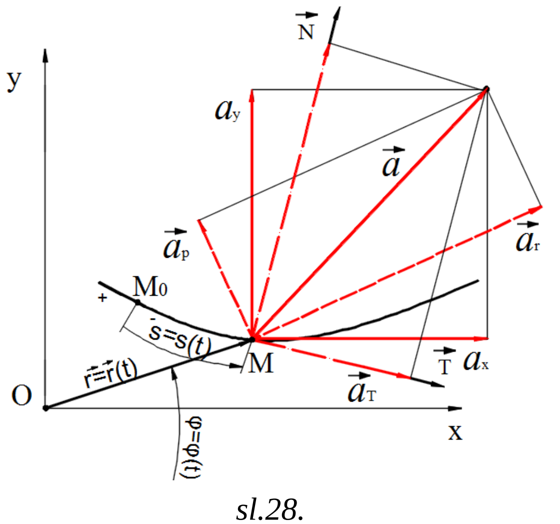


sl.27.

Odnosno, tangentno i normalno ubrzanje tačke je:

$$a_T = r\ddot{\varphi}$$
$$a_N = r\dot{\varphi}^2.$$

Treba napomenuti, da brzina i ubrzanje tačke ne zavisi od izbora postupka određivanja kretanja, već od prirode kretanja tačke, što je određeno konačnim jednačinama kretanja tačke. Tako na primjer, kada se tačka M kreće u ravni (*sl.28.*), pravac, smjer i intezitet vektora ubrzanja ostaje isti bez obzira na izbor postupka kojim određujemo kretanje.



sl.28.

2.3.4. Klasifikacija kretanja tačke prema njenom ubrzanju

Kretanje tačke može se klasifikovati zavisno od tangencijonalnog i normalnog ubrzanja tačke u nekom posmatranom inervalu vremena.

a) Pravolinijsko kretanje tačke

Tačka vrši pravolinijsko kretanje u nekom intervalu vremena ako joj je normalno ubrzanje jednako nuli ($a_N = 0$). Ovaj zaključak slijedi iz $a_N = \frac{v^2}{R_k} = 0$, odnosno slijedi da je poluprečnik krivine putanje $R_k = \infty$. S obzirom na svojstvo normalnog ubrzanja, slijedi da vektor brzine tačke u posmatranom intervalu vremena ne mijenja pravac.

Ukupno ubrzanje tačke pri pravolinijskom kretanju jednako je tangencijalnom ubrzanju tj. $\vec{a} = \vec{a}_T$ i zavisno od tangencijalnog ubrzanja mogu da nastupe sljedeći slučajevi:

1) Ako je u nekom intervalu vremena $a_N = 0$ i $a_T \neq const$, tačka vrši *neravnomjerno pravolinijsko kretanje.*

Ako je u nekom intervalu vremena $a_N = 0$ i $a_T = const \neq 0$, tačka vrši *jednakopromjenljivo odnosno ravnomjernopromjenljivo pravolinijsko kretanje.*

Zavisno od smjera vektora $\vec{v}$ i $\overrightarrow{a_T}$, posmatrana kretanja mogu biti ubrzana ili usporena, i to

- ako je $\vec{v} \cdot \overrightarrow{a_T} > 0$, vektor brzine i vektor tangentnog ubrzanja su istih smjerova, kretanje tačke je ubrzano (*sl.29.*),
- ako je $\vec{v} \cdot \overrightarrow{a_T} < 0$, vektor brzine i vektor tangentnog ubrzanja su suprotnih smjerova, kretanje tačke je usporeno (*sl.30.*).
-

sl. 29.

sl. 30.

2) Ako je u nekom intervalu vremena $a_N = 0$ i $a_T = 0$, tačka vrši *ravnomjerno pravolinijsko kretanje*.

U ovom slučaju je ukupno ubrzanje tačke jednako nuli ($\vec{a} = 0$), a vektor brzine nepromjenljiv odnosno konstantan $\vec{v} = const.$.

b) *Krivolinijsko kretanje tačke*

Tačka vrši krivolinijsko kretanje u nekom intervalu ako je normalno ubrzanje različito od nule ($a_N \neq 0$). Zavisno od tangencijalnog ubrzanja mogu da nastupe sljedeći slučajevi:

1) Ako je u nekom intervalu vremena $a_N \neq 0$ i $a_T \neq const$, tačka vrši *neravnomjerno krivolinijsko kretanje*.

- Ako je u nekom intervalu vremena $a_N \neq 0$ i $a_T = const \neq 0$, tačka vrši jednakopromjenljivo odnosno *ravnomjernopromjenljivo krivolinijsko kretanje.*

Zavisno od smjera vektora $\overrightarrow{v_T}$ i $\overrightarrow{a_T}$ mogu da nastupe sljedeći slučajevi:

- ako je $\vec{v} \cdot \overrightarrow{a_T} > 0$ krivolinijsko kretanje je ubrzano (ugao između $\vec{v}$ i $\vec{a}$ je oštar), (*sl.31*).

sl. 31.

- ako je $\vec{v} \cdot \overrightarrow{a_T} < 0$, krivolinijsko kretanje je usporeno (ugao između $\vec{v}$ i $\vec{a}$ je tup) (*sl.32.*).

a) Ako je u nekom intervalu vremena $a_N \neq 0$ i $a_T = 0$, tačka vrši ravnomjerno krivolinijsko kretanje i tada je $\vec{a} = \vec{a}_N$.

sl.32.

Sada se mogu odrediti izrazi za zakon kretanja tačke po trajektoriji ($s = s(t)$) i zakon promjene brzine ($v = v(t)$) koji važe za prethodno razmatrane slučajeve kretanja tačke. Slijedi da je,

$$dv = a_T dt\ . \tag{2.76}$$

Polazeći od toga da je poznato tangencijalno ubrzanje i da je tačka u početnom trenutku ($t_0 = 0$) bila u položaju $s(t_0) = s_0$ i imala brzinu $v(t_0) = v_0$.

Vodeći računa o početnim uslovima, nakon integracije iz jenačine (2.76) dobija se:

$$v = v_0 + \int_0^t a_T dt, \tag{2.77}$$

što predstavlja zakon promjene brzine pri neravnomjernom kretanju tačke.

Zakon kretanja tačke po putanji, korišćenjem izraza (*2.34*) može se pisati u obliku

$$ds = v_T\, dt. \tag{2.78}$$

Nakon inegraljenja prethodne jednačine, slijedi da je,

$$s = s_0 + v_{T0} t + \int_0^t \left(\int_0^t a_T dt \right) dt, \tag{2.79}$$

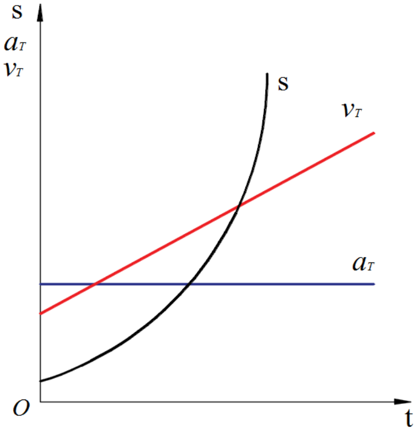
što predstavlja *zakon kretanja tačke po putanji* pri neravnomjernom kretanju.

Ako se tačka kreće jednakopromjenljivo, važi $a_T = const$, a relacije za brzinu i zakon kretanja tačke po putanji imaju oblik,

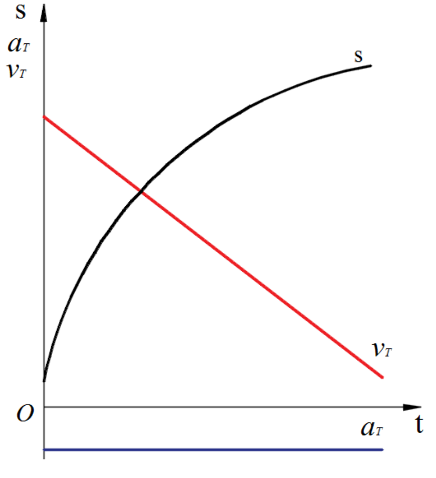
$$v_T = v_{T0} + a_T t \tag{2.80}$$

$$s = s_0 + v_{T0} t + \frac{1}{2} a_T t^2. \tag{2.81}$$

Grafički prikazi funkcionalnih zavisnosti (2.80) i (2.81) predstavljaju osnovne kinematičke dijagrame pri jednakopromjenljivom, odnosno ravnomjernopromjenljivom kretanju tačke (*sl.33*). Ako je pri jednakopromjenljivom kretanju tačke tangencijalno ubrzanje negativno, tj. ako važi $a_T = const < 0$, tada važe relacije (*2.80*) i (*2.81*), osnovni kinematički dijagrami imaju oblik kao što je prikazano na slici (*sl.34.*).



sl.33.

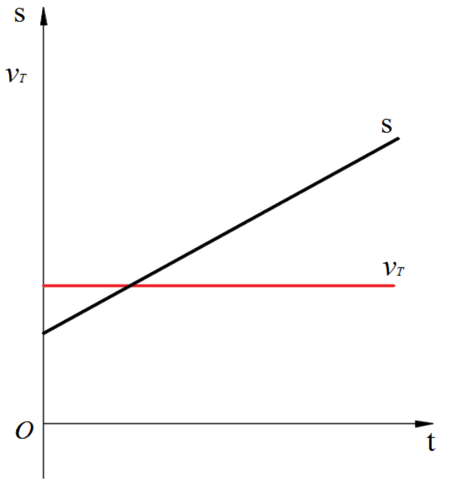


sl.34.

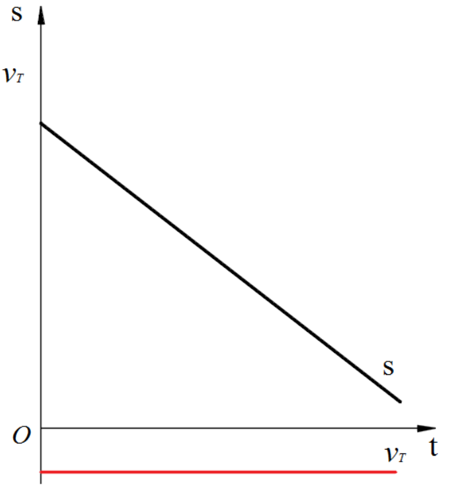
Ako se tačka kreće ravnomjerno, tada je $a_T = 0$ i relacije za brzinu i zakon kretanja tačke po trajektoriji imaju oblik

$$v_T = v_{T0}, \quad s = s_0 + v_{T0} t. \tag{2.82}$$

Osnovni kinematički dijagrami pri ravnomjernom kretanju tačke dati su na slici (*sl.35.*).



sl.35.



sl.36.

Ako je pri ravnomjernom kretanju tačke veličina v_T negativna, tj.

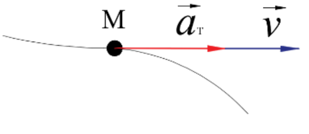
$$v_T = const < 0,$$

tada važe relacije (2.82), a osnovni kinematički dijagrami su oblika datog na (*sl.36.*).

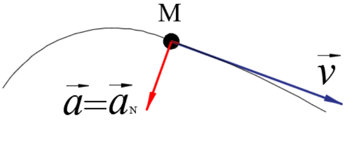
Ako se posmatra tangencijalno i normalno ubrzanje tačke u nekom trenutku, zapaža se da:

a) ako je u nekom trenutku vremena $a_N = \frac{{v_T}^2}{R_k} = 0$, to ne mora da znači da se tačka kreće pravolinijski, već da u tom trenutku tačka prolazi kroz prevojnu tačku (*sl.37.*) ili mijenja smjer svog kretanja ($v = 0$);

b) ako je u nekom trenutku $a_T = \frac{dv_T}{dt} = 0$, to ne mora da znači da se tačka kreće jednoliko, već da u tom trenutku intenzitet brzine v dostiže ekstremnu vrijednost (*sl.38.*).



sl.37.



sl.38.

ZADACI

<u>Zadatak 2.1.</u> Vektor položaja tačke M dat je, u odnosu na Dekartov koordinatni sistem, sa

$$\vec{r} = (4t^2)\vec{\imath} + (2t^2 + 2)\vec{\jmath} \quad [cm]$$

Vrijeme t se mjeri u sekundama.

Odrediti:

a) putanju i trajektoriju tačke M,

b) brzinu tačke M,

c) ubrzanje tačke M.

<u>Rješenje:</u>

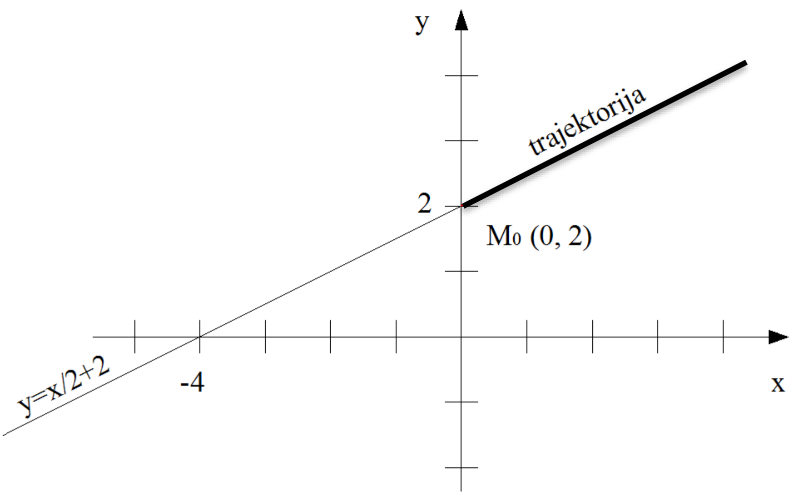
a) Parametarske jednačine kretanja tačke M, u Dekarotovim koordinatama, možemo napisati kao,

$$x = 4t^2 \; [cm]$$
$$y = 2t^2 + 2[cm]$$

Eliminacijom parametra t iz jednačina kretanja, dobićemo liniju putanje tačke M u obliku

$$\boldsymbol{y = \frac{x}{2} + 2}$$

Početni položaj tačke određen je njenim koordinatama u trenutku $t_0 = 0$ tj. $M_0(0{,}2)$. Porastom parametra t (vremena), iz parametarskih jednačina, dobijaju se položaji tačke M u vremenu, čijim spajanjem dobijamo trajektoriju tačke M (*sl.2.1.*).



sl.2.1.

b) Projekcije vektora brzine tačke M, na ose Dekartovog koordinatnog sistema, su

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 8t$$
$$v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = 4t$$

pa se vektor brzine tačke M, može napisati u obliku,

$$\vec{v} = 8t\,\vec{i} + 4t\,\vec{j}$$

odnosno intenzitet brzine tačke M je,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{64t^2 + 16t^2} = \mathbf{2\sqrt{20}\boldsymbol{t}}\ \left[\frac{cm}{s}\right]$$

c) Projekcije vektora ubrzanja tačke *M*, na ose Dekartovog koordinatnog sistema, su

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = 8$$
$$a_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = 4$$

Vektor ubrzanja tačke određen je sa

$$\vec{a} = 8\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$$

odnosno intenzitet ubrzanja tačke je

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{64 + 16} = \mathbf{2\sqrt{20}}\ \left[\frac{cm}{s^2}\right]$$

Zadatak 2.2. Date su konačne jednačine kretanja tačke M u Dekartovim koordinatama kao

$$x = 3\cos 2t$$
$$y = 2\,sin\,t,$$

gdje su koordinate *x* i *y* izražene u metrima, a vrijeme u sekundama.
Odrediti:
a) brzinu i ubrzanje tačke M u proizvoljnom trenutku vremena;
b) tangentno i normalno ubrzanje tačke M u trenutku $t_1 = \frac{\pi}{6}\,s$.

Rješenje:

a) Projekcije vektora brzine tačke M u Dekartovim koordinatama su

$$\dot{x} = -6\sin 2t$$
$$\dot{y} = 2\,cos\,t$$

odnosno intenzitet brzine tačke, dobijamo kao

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(-6\sin 2t)^2 + (2\,cos\,t)^2} = 2\sqrt{9sin^2 2t + cos^2 t} \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

Projekcije vektora ubrzanja tačke M su,

$$\ddot{x} = -12\cos 2t$$
$$\ddot{y} = -2\,sin\,t$$

odnosno intenzitet obrzanja tačke određen je sa,

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(-12\cos 2t)^2 + (-2\,sin\,t)^2} = 2\sqrt{36\mathrm{cos}^2 2\mathrm{t} + \mathrm{sin}^2\mathrm{t}} \quad \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

b) Tangentno ubrzanje tačke M je,

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}(2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y}) = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

što u trenutku vremena $t_1 = \frac{\pi}{6}s$ iznosu

$$a_{T(t=t_1)} = \frac{18\sqrt{3} - \sqrt{3}}{\sqrt{30}} = \frac{17\sqrt{10}}{10} \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Sada kada smo odredili tangentno ubrzanje, a predhodno smo odredili i ukupno ubrzanje, normalno ubrzanje tačke se dobija iz izraza

$$a = \sqrt{{a_T}^2 + {a_N}^2}$$

kao,

$$a_N = \sqrt{a^2 - {a_T}^2},$$

i u trenutku vremena $t_1 = \frac{\pi}{6}s$, ono iznosi

$$a_{N(t=t_1)} = \sqrt{{a_{(t=t_1)}}^2 - {a_{T(t=t_1)}}^2} = 2{,}85 \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Zadatak 2.3. Date su jednačine kretanja tačke M u polarnim koordinatama sa:

$$r = 2e^{4t}\ [cm]$$
$$\varphi = 2t\ [rad].$$

gdje je t vrijeme i mjeri se u sekundama.
Odrediti:

a) brzinu i ubrzanje tačke *M*, u proizvoljnom trenutku vremena
b) poluprečnik krivine putanje, u funkciji polarnog rastojanja - potega r.

Rješenje:

a) Ako nađimo prve i druge izvode po vremenu veličina $r\ i\ \varphi$, dobijamo

$$\dot{r} = 8e^{4t}, \text{ odnosno } \ddot{r} = 32e^{4t}$$
$$\text{i } \dot{\varphi} = 2, \text{ odnosno } \ddot{\varphi} = 0.$$

Projekcije vektora brzine tačke M u polarnim koordinatama su:

$$v_r = \dot{r} = 8e^{4t}$$
$$v_p = r\dot{\varphi} = 4e^{4t}$$

pa je intenzitet brzine tačke u funkciji vremena određen sa

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = \sqrt{64e^{8t} + 16e^{8t}} = 2\sqrt{20}e^{4t} \quad \left[\frac{cm}{s}\right]$$

Projekcije ubrzanja tačke M u polarnim koordinatama su

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 32e^{4t} - 8e^{4t} = 24e^{4t}$$
$$a_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 + 32e^{4t} = 32e^{4t}$$

odnosno intenzitet ubrzanja tačke u funkciji vremena je

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_p^2} = \sqrt{(24e^{4t})^2 + (32e^{4t})^2} = 40e^{4t} \quad \left[\frac{cm}{s^2}\right].$$

b) Ako nađemo intenzitet tangentnog ubrzanja tačke,

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2\sqrt{20}e^{4t}\right) = 8\sqrt{20}e^{4t}$$

normalno ubrzanje tačke je,

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = 4\sqrt{20}e^{4t}$$

odnosno, poluprečnik krivine putanje u funkciji potega r, je

$$R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{\left(2\sqrt{20}e^{4t}\right)^2}{4\sqrt{20}e^{4t}} = 2\sqrt{5}e^{4t} = \sqrt{5}r \quad [cm]$$

Zadatak 2.4. Tačka C se kreće po kružnici poluprečnika $R = 0{,}8\ m$ po zakonu $s = 2t^3 - t\ [m]$, pri čemu se vrijeme mjeri u sekundama. Odrediti ubrzanje tačke C u trenutku $t_1 = 0{,}5\ s$.

Rješenje:

Ubrzanje tačke C, pri prirodnom postupku definisanja kretanja, jednako je vektorskom zbiru normalne i tangentne komponente ubrzanja:

$$\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T.$$

Tangentno ubrzanje jednako je prvom izvodu projekcije vektora brzine na tangentu po vremenu, odnosno drugom izvodu lučne koordinate s:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 12t\ \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Brzina tačke C je:

$$v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 1\ \left[\frac{m}{s}\right].$$

Normalno ubrzanje tačke C je:

$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(6t^2-1\right)^2}{0{,}8} = \frac{36t^4-12t^2+1}{0{,}8}$, odnosno

$$a_N = 45t^4 - 15t^2 + 1{,}25.$$

U trenutku $t_1 = 0{,}5\ s$, slijedi da je:

$$a_{T1} = 5\ \left[\frac{m}{s^2}\right],$$

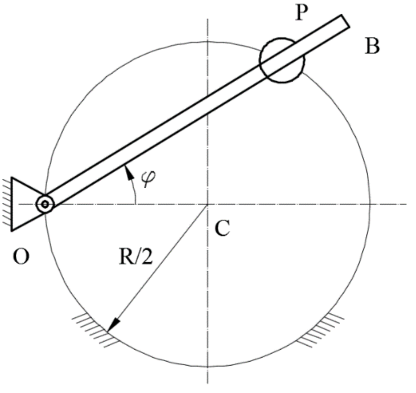
$$a_{N1} = 0{,}3125\ \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Intenzitet ukupnog ubrzanja tačke C u trenutku $t_1 = 0{,}5\ s$ iznosi:

$a_1 = \sqrt{a_{T1}{}^2 + a_{N1}{}^2} = \sqrt{6^2 + 0{,}3125^2}$

$$\boldsymbol{a_1 = 6{,}007\ \left[\frac{m}{s^2}\right]}.$$

Zadatak 2.5. Poluga OB, dužine $\overline{OB} > R$, obrće se u naznačenom smjeru po zakonu $\varphi = \omega_0 t\ [rad]$, gdje je $\omega_0 = const.$ i pri tome dovodi u kretanje prsten P koji je istovremeno namaknut na polugu OB i kružni obruč poluprečnika $R/2$ (*sl.2.2*). Odrediti brzinu i ubrzanje prstena P u:



sl.2.2.

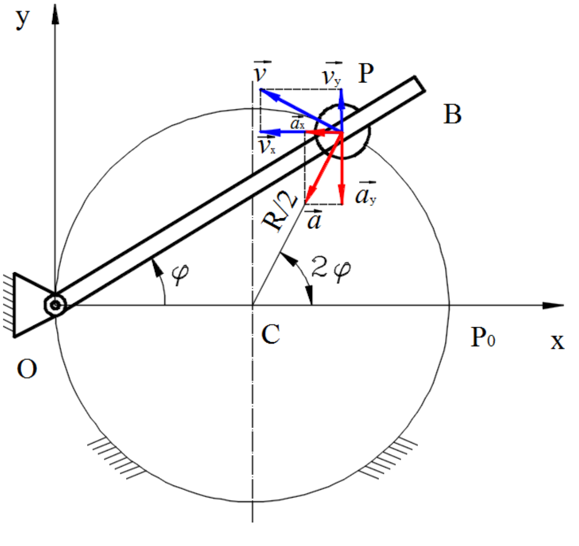
a) Dekartovim koordinatama;
b) polarnim koordinatama
c) prirodnom postupku određivanja kretanja

Rješenje:

a) Položaj prstena P, odnosno konačne jednačine kretanja prstena izražene u Dekartovim koordinatama (*sl.2.2a*), su

$$x = \frac{R}{2} + \frac{R}{2}\cos 2\varphi = \frac{R}{2} + \frac{R}{2}\cos 2\omega_0 t$$

$$y = \frac{R}{2}\sin 2\varphi = \frac{R}{2}\sin 2\omega_0 t$$



sl.2.2.a

Projekcije vektora brzine prstena P na Dekartove koordinatne ose O_x i O_y su:

$$v_x = \dot{x} = -R\,\omega_0 \sin 2\omega_0 t$$

$$v_y = \dot{y} = R\,\omega_0 \cos 2\omega_0 t$$

Intenzitet brzine prstena P je:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(-R\,\omega_0 \sin 2\omega_0 t)^2 + (R\,\omega_0 \cos 2\omega_0 t)^2}$$

$$\boldsymbol{v = R\omega_0}.$$

Projekcije vektora ubrzanja prstena P na Dekartove koordinatne ose O_x i O_y su:

$$a_x = \ddot{x} = -2R\,{\omega_0}^2 \cos 2\omega_0 t$$

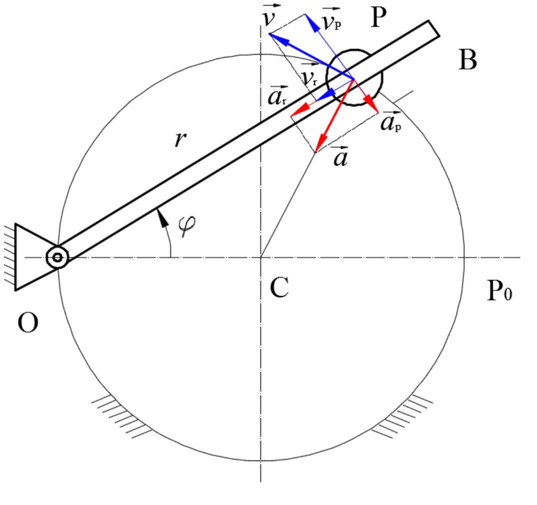
$$a_y = \ddot{y} = -2R\,{\omega_0}^2 \sin 2\omega_0 t$$

Intenzitet ubrzanja prstena P:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(-2R\,{\omega_0}^2 \cos 2\omega_0 t)^2 + (-2R\,{\omega_0}^2 \sin 2\omega_0 t)^2}$$

$$\boldsymbol{a = 2R{\omega_0}^2}.$$

b) Jednačine kretanja prstena P u polarnim koordinatama (*sl.2.2.b*), su:



sl.2.2.b

$$r = R\,cos\varphi = R\,cos\omega_0 t$$

$$\varphi = \omega_0 t$$

Prvi i drugi izvod prethodnih jednakosti po vremenu su

$\dot{r} = -R\,\omega_0 \sin\omega_0 t$

$\dot{\varphi} = \omega_0$

$\ddot{r} = -R\,{\omega_0}^2 \cos\omega_0 t$

$\ddot{\varphi} = 0$

Projekcije vektora brzine na ose polarnog koordinatnog sistema su radijalna i poprečna brzina prstena P:

$$v_r = \dot{r} = -R\,\omega_0 \sin\omega_0 t$$

$$v_p = r\dot{\varphi} = R\,\omega_0 \cos\omega_0 t$$

Intenzitet brzine prstena u proizvoljnom trenutku iznosi:

$$v = \sqrt{{v_r}^2 + {v_p}^2} = \sqrt{(-R\,\omega_0 \sin\omega_0 t)^2 + (R\,\omega_0 \cos\omega_0 t)^2}$$

$$\boldsymbol{v = R\omega_0}.$$

Projekcije vektora ubrzanja na ose polarnog koordinatnog sistema su:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -2R\,{\omega_0}^2 \cos 2\omega_0 t$$

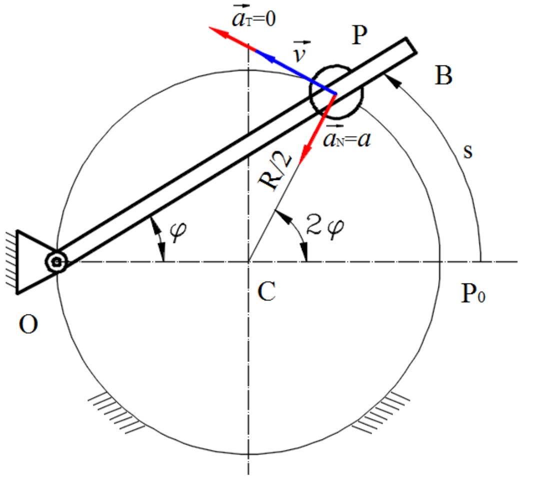
$$a_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = -2R\,{\omega_0}^2 \sin 2\omega_0 t$$

Intenzitet ubrzanja prstena P iznosi:

$$a = \sqrt{{a_r}^2 + {a_p}^2} = \sqrt{(-2R\,{\omega_0}^2 \cos 2\omega_0 t)^2 + (-2R\,{\omega_0}^2 \sin 2\omega_0 t)^2}$$

$$\boldsymbol{a = 2R{\omega_0}^2}.$$

c) Položaj prstena u svakom trenutku vremena možemo odrediti i u prirodnom postupku određivanja kretanja, odnosno pomoću koorinate $s = s(t)$ (*sl.2.2c*)



sl.2.2.c

Ako zapazimo centralni ugao 2φ, položaj prstena P izražen preko krivolinijske koordinate *s* je

$$s = 2\varphi\frac{R}{2} = 2\frac{R}{2}\cdot\omega_0 t = R\cdot\omega_0 t$$

Projekcija vektora brzine prstena *P* na pravac tangente predstavlja prvi izvod koordinate *s* u vremenu, i jednaka je

$$\boldsymbol{v_T = \frac{ds}{dt} = R\omega_0}.$$

Pošto je brzina prstena *P* konstantna po intenzitetu, slijedi da je tangentno ubrzanje jednako nuli, odnosno

$$a_T = \frac{dv_T}{dt} = 0,$$

Komponenta normalnog ubrzanja tačke je

$$a_N = \frac{v^2}{\frac{R}{2}} = \frac{R^2{\omega_0}^2}{\frac{R}{2}} = 2R{\omega_0}^2$$

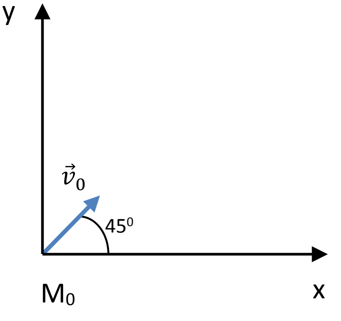
Kako je tangentno ubrzanje jednako nuli ($a_T = 0$), slijedi da je ukupno ubrzanje prstena P jednako normalnom ubrzanju, odnosno:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_N} = \boldsymbol{2R\omega_0}^{\boldsymbol{2}}.$$

Iz ovog primjera se moglo vidjeti da brzina i ubrzanje tačke ne zavisi od izbora postupka određivanja kretanja, već od prirode kretanja tačke.

Zadatak 2.6. Tačka M se kreće u ravni O_{xy} ubrzanjem konstantnog intenziteta $a = 3\frac{m}{s^2}$, a pravca paralelnog osi Ox. U početnom trenutku tačka je imala brzinu $v_0 = 6\frac{m}{s}$ koja sa osom O_x obrazuje ugao od 45^0 (*sl.2.3*). Odrediti poluprečnik krivine putanje u trenutku $t_1 = 1s$.

Rješenje:



sl.2.3.

Projekcije vektora ubrzanja u Dekartovim koordinatama su

$$a_x = \ddot{x} = 3$$
$$a_y = \ddot{y} = 0.$$

Integracijom prethodnih izraza, uz korišćenje početnih uslova, dobijamo sljedeće vrijednosti brzine i tangentnog ubrzanja u trenutku $t_1 = 1s$:

$$v_x = \dot{x} = \int a_x = 3t + c_1$$
$$\dot{y} = c_2$$

za $t = 0$, $\dot{x_0} = \dot{y} = 6\cos 45^0 \;\rightarrow\; c_1 = c_2 = 6\cos 45^0$, odnosno,

$$\dot{x} = 3t + 3\sqrt{2}$$
$$\dot{y} = 3\sqrt{2}$$

za t=1s, brzina tačke je

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\left(3 + 3\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2}$$

odnosno,

$$v = 8{,}38\ \left[\frac{m}{s}\right].$$

Tangentno ubrzanje tačke je

$$a_T = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{v} = \frac{7{,}24 \cdot 3 + 3\sqrt{2} \cdot 0}{8{,}38} = 2{,}58 \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

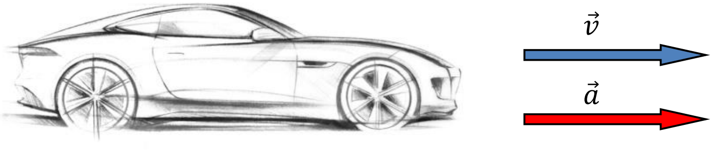
Normalno ubrzanje tačke je:

$$a_N = \sqrt{a^2 - {a_T}^2} = \sqrt{3^2 - 2{,}58^2} = 1{,}52 \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Poluprečnik krivine putanje R_K, u trenutku $t_1 = 1s$, iznosi:

$$R_K = \frac{v^2}{a_N} = \frac{8{,}38^2}{1{,}52} = \mathbf{46{,}2}\ [\boldsymbol{m}].$$

<u>**Zadatak 2.7**</u>. Automobil se kreće pravolinijski jednakopromjenjivo ubrzanjem $a = 0{,}5\,\frac{m}{s^2}$. Koliko vremena je potrebno da vozilo pređe prvi metar puta, a koliko za peti metar puta? Koju će brzinu imati vozilo na kraju petog metra puta?



sl.2.4.

<u>Rješenje:</u> Iz postavke zadatka se uočava da je ubrzanje konstantno ($a = const.$).

Kako se automobil kreće jednakopromjenjivo, zakon promjene brzine i zakon kretanja mogu se napisati u obliku

$v = v_0 + at;$

$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$

za $t = 0$, u početnom trenutku vremena je $v_0 = 0$ i $s_0 = 0$,

pa predhodni izrazi imaju oblik

$$v = at;$$

$$s = \frac{1}{2} a t^2,$$

Vrijeme koje je potrebno da automobil pređe prvi metar puta je,

$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{0,5}} = \mathbf{2}\ [\boldsymbol{s}]$

a vrijeme potrebno da automobil pređe peti metar puta je,

$t_5 = \sqrt{\frac{2s_5}{a}} - \sqrt{\frac{2s_4}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{0,5}} - \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{0,5}} = \mathbf{0,46}\ [\boldsymbol{s}].$

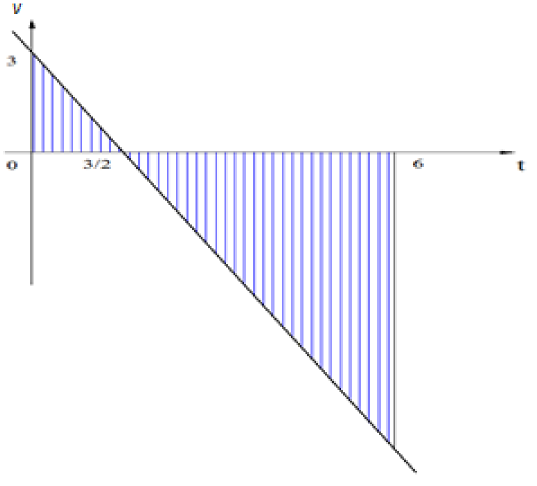
Brzina automobila na kraju petog metra puta iznosi:

$$v_5 = at = a\sqrt{\frac{2s_5}{a}} = \sqrt{2s_5 \cdot a} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 0,5} = \mathbf{2,24}\ \left[\frac{m}{s}\right]$$

<u>Zadatak 2.8</u>. Tačka M se kreće po trajektoriji brzinom $v = 3 - 2t\ \frac{m}{s}$, pri čemu se vrijeme mjeri u sekundama. Odrediti koliki put pređe tačka za prvih šest sekundi kretanja.

Rješenje: Ako je intezitet brzine tačke poznata funkcija vremena $v = v(t)$ onda je moguće odrediti zakon kretanja kao $s = \int_{t_0}^{t} v(t)dt + s_0$.

Kako se u posmatranom vremenskom intervalu $0\ s \le t \le 6\ s$, brzina mijenja po zakonu (*sl.2.5*), odnosno tačka mijenja svoj smjer kratanja, to se pređeni put S_p može odrediti kao zbir pređenih puteva za ta dva vremenska inervala.



sl.2.5.

Pređeni put tačke u posmatranom vremenskom inervalu je:

$$S_p = \int_{t_0=0\ s}^{t_1=\frac{3}{2}s} vdt - \int_{t_1=\frac{3}{2}s}^{t_2=6\ s} vdt = (3t - t^2)|_0^{\frac{3}{2}} - (3t - t^2)|_{\frac{3}{2}}^{6}$$

pa je,

$$S_p = \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4}\right) - \left(-18 - \frac{9}{2} + \frac{9}{4}\right)$$

Odnosno, pređeni put za prvih šest mnuta kretanja je

$\boldsymbol{S_p = 22,5\ [m]}$.

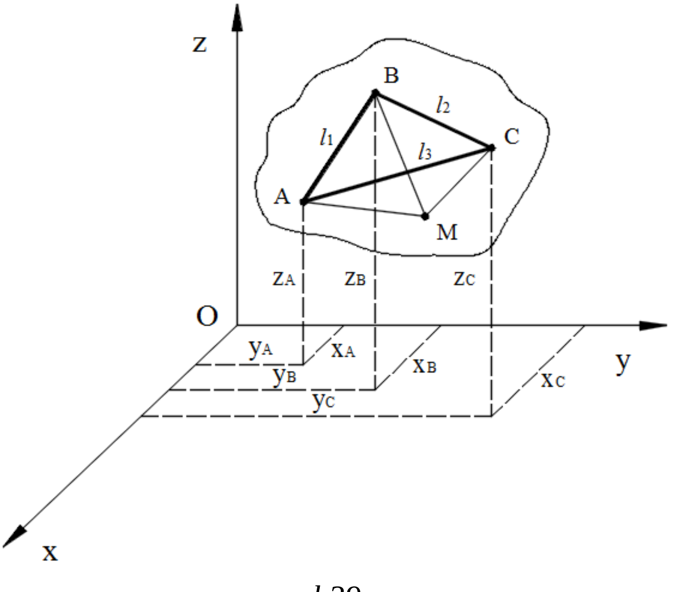
3. KINEMATIKA KRUTOG TIJELA

3.1. OSNOVNI POJMOVI KINEMATIKE KRUTOG TIJELA

Pod krutim tijelom, u mehanici, podrazumijeva se tijelo koje ne mijenja svoj geometrijski oblik, odnosno kod koga se rastojanje između bilo koje dvije tačke tijela tokom kretanja ne mijenja.

Pod položajem krutog tijela u prostoru podrazumijeva se položaj svih tačaka tijela u odnosu na utvrđeni sistem referencije, najčešće je to Dekartov koordinatni sistem desne orjentacije. S obzirom da su kod krutog tijela uzajamna rastojanja tačaka nepromjenjiva, moguće je položaj bilo koje tačke krutog tijela pri njegovom kretanju jednoznačno odrediti ako je poznato odstojanje te tačke od ostalih tačaka tijela.

Kako je već poznato, položaj tačke u prostoru, u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem, određen je sa tri nezavisne pravougaone koordinate *x*,*y* i *z*. Da bismo odredili položaj krutog tijela u prostoru u odnosu na izabrani Dekartov koordinati sistem O_{xyz}, uočimo na tijelu tri proizvoljno izabrane nekolinearne tačke *A*,*B* i *C* (*sl.39*).



sl.39.

Položaj tih tačaka, a sa tim i tijela, određen je sa devet koordinata. Pri tome su rastojanja $l_1, l_2\ i\ l_3$ između tih tačaka tijela nepromjenjiva, pa koordinate tačaka *A,B i C* moraju zadovoljavati sledeće jednačine,

$$\begin{aligned}(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = l_1^2\\ (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = l_2^2\\ (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = l_3^2\end{aligned} \tag{3.1}$$

Prema tome, od devet koordinata tačaka *A, B i C*, šest je nezavisnih a ostale tri se određuju iz jednačina (3.1). Ako se uoči bilo koja tačka *M* krutog tijela, tada njene koordinate takođe moraju zadovoljiti ove jednačine, kojim se izražava nepromjenjivost rastojanja tačke *M* od tačaka *A, B i C*. Tako da je, položaj krutog tijela u prostoru određen sa položajm tri nekolinearne tačke toga tijela.

Broj nezavisnih parametara, pomoću kojih se može jednoznačno odrediti položaj krutog tijela u prostoru, u odnosu na proizvoljno izabrani sistem referencije, naziva se broj stepeni slobode kretanja krutog tijela.

Broj stepeni slobode kretanja krutog tijela ili tačke označava broj nezavisnih kretanja koje tijelo ili tačka može da izvodi u prostoru. Tako da tačka ima tri stepena slobode kretanja, jer njen položaj pri kretanju u prostoru određuju tri nezavisne koordinate *x*, *y* i *z*. Slobodno kruto tijelo u prostoru ima šest stepeni slobode kretanja, jer ga određuje šest nezavisnih parametara. To znači da može da izvodi šest nezavisnih kretanja: tri translatorna pomjeranja u pravcu tri ose, i tri obrtanja oko tri međusobno upravne ose. Ukoliko postoje dodatna ograničenja koja potiču od drugih tijela, mehaničkih veza, broj stepeni slobode se smanjuje.

Osnovni zadaci kinematike krutog tijela su:

1) Utvrđivanje matematičkih metoda za definisanje položaja krutog tijela pri kretanju u prostoru u odnosu na izabrani sistem referencije.
2) Određivanje kinematičkih karakteristika krutog tijela kao cjeline i svake tačke krutog tijela posebno na osnovu poznatih jednačina kretanja tijela.

Položaj krutog tijela u prostoru može biti određen preko nezavisnih parametara koje nazivamo generalisane (opšte) koordinate. Generalisane koordinate tijela ili tačke su nezavisni parametri pomoću kojih se može jednoznačno odrediti položaj tijela u svakom trenutku vremena u odnosu na izabrani sistem referencije.

Osnovna kretanja krutog tijela su translatorno i obrtno kretanja. Iz ovih osnovnih kretanja sastoje se sva ostala kretanja djelimočno vezanih (neslobodnih) krutih tijela.

Pri proučavanju kretanja krutog tijela podijeloćemo ih na:

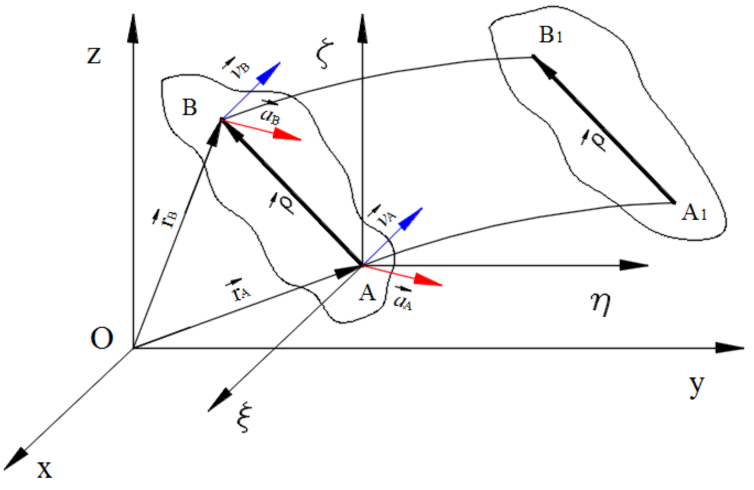
1. Translatorno kretanje
2. Obrtanje oko nepokretne ose
3. Ravno kretanje
4. Obrtanje oko nepokretne tačke
5. Opšte kretanje
6. Složeno kretanje

3.2. TRANSLATORNO KRETANJE KRUTOG TIJELA

Translatorno kretanje krutog tijela je takvo kretanje pri kome, proizvoljno izabrana duž koja spaja bilo koje dvije tačke tijela, u svakom trenutku ostaje paralelna ili podudarna samoj sebi.

Putanja svih tačaka tijela su istovjetne (identične) linije, samo međusobno pomjerene u prostoru. U zavisnosti od oblika putanje tačka translacija krutog tijela može biti pravolinijska i krivolinijska. Kod pravolinijske translacije trajektorije svih tačaka su paralelne prave a kod krivolinijske translacije trajektorije svih tačaka su podudarne linije.

U cilju analiziranja translatornog kretanja posmatrajmo slobodno tijelo i uočimo dva njegova položaja u odnosu na nepokretni Dekartov koordinatni sistem O_{xyz} (*sl.40.*). Za pokretno tijelo vezaćemo koordinatni sistem $A_{\xi\eta\zeta}$ i ako na tijelu uočimo dvije tačke A i B, onda je položaj tih tačaka u odnosu na sistem reference O_{xyz} određen vektorima položaja $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$, dok je položaj tačke B u odnosu na pokretni koordinatni sistem $A_{\xi\eta\zeta}$ određen vektorom položaja $\vec{\rho}$.



sl.40.

Ako je poznat početni položaj tijela onda se cjelokupno kretanje tijela može izučiti preko kretanja samo jedne tačke, pola. Ako se zna položaj tačke A u svakom trenutku vremena, položaj bilo koje tačke, npr. tačke B, određuje se pomoću vektora,

$$\overrightarrow{r_B} = \overrightarrow{r_A} + \vec{\rho}, \tag{3.2}$$

gdje je vektor položaja $\vec{\rho} = \overrightarrow{AB}$ konstantnog inteziteta i pravca.
Brzina tačke B je:

$$\overrightarrow{v_B} = \frac{d\overrightarrow{r_B}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{r_A} + \vec{\rho}) = \frac{d\overrightarrow{r_A}}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} \tag{3.3}$$

Kako je vektor položaja $\vec{\rho} = \overrightarrow{AB}$ konstantnog inteziteta i pravca, slijedi da je $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = 0$, pa je :

$$\frac{d\overrightarrow{r_B}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r_A}}{dt}$$

odnosno:

$$\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_A} \tag{3.4}$$

Diferenciranjem brzine po vremenu dobija se:

$$\frac{d\overrightarrow{v_B}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{v_A}}{dt}$$

odnosno,

$$\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} \tag{3.5}$$

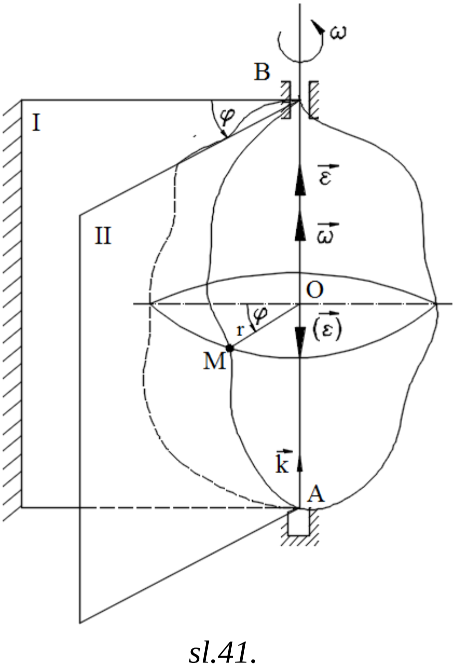
Prema tome, pri translatornom kretanju krutog tijela sve tačke tijela se kreću na isti način, odnosno imaju iste putanje, vektore brzine i vektore ubrzanja. Iz predhodno rečenog, može se kazati da je translatorno kretanje tijela u potpunosti određeno kretanjem samo jedne proizvoljne tačke tijela.

3.3. OBRTANJE KRUTOG TIJELA OKO NEPOKRETNE OSE

Obrtanje (rotacija) tijela oko nepokretne ose je takvo kretanje tijela pri kome bar dvije tačke tijela ostaju za vrijeme kretanja nepokretne.

Nepokretne su i sve ostale tačke koje se nalaze na pravoj liniji koja prolazi kroz te dvije tačke. Ta orjentisana prava naziva se *osa obrtanja ili osa rotacije*. Sve ostale tačke tijela opisuju kružne putanje koje leže u ravnima okomitim na osu obtanja sa centrima rotacije na toj osi.

Neka nepokretna osa prolazi kroz tačke *A i B*, koje su čvrsto vezane za tijelo i koje predstavljaju uležištenja. (*sl.41*).



sl.41.

Položaj tijela pri obrtanju određen je uglom obrtanja φ, koji se mjeri od referentne vertikalne nepokretne ravni I, koji se neprekidno mijenja tokom vremena.
Zakon obrtanja krutog tijela, oko nepokretne ose, određen je jednačinom

$$\varphi = \varphi(t) \tag{3.6}$$

gdje se ugao φ iskazuje u radijanima.

Ugao obrtanja φ, može da se izrazi i preko broja obrtaja n, kao

$$\varphi = 2\pi n \ .$$

Sobzirom na prirodu kretanja potrebno je da, funkcija promjene ugla obrtanja $\varphi = \varphi(t)$, bude jednoznačna, neprekidna i dva puta diferencijabilna funkcija vremena.

Prema tome, položaj krutog tijela kao cjeline pri obrtanju oko nepokretne ose određen je sa jednim nezavisnim parametrom, uglom obrtanja, tako da tijelo ima jedan stepen slobode kretanja.

3.3.1. Ugaona brzina i ugaono obrzanje krutog tijela

Kinematičke karakteristike tijela kao cjeline pri njegovom obrtanju oko nepokretne ose su ugaona brzina ω i ugaono ubrzanje ε.
Srednja ugaona brzina je definisana za interval vremena $\Delta t = t_2 - t_1$, odnosno

$$\omega_{sr} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}{t_2-t_1}, \tag{3.7}$$

dok je ugaona brzina tijela u datom trenutku vremena veličina kojoj teži srednja ugaona brzina kada interval vremena teži nuli, odnosno

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi} \tag{3.7a}$$

Ugaona brzina ω krutog tijela, koje se obrće oko nepokretne ose, u datom trenutku vremena, jednaka je prvom izvodu ugla obrtanja po vremenu.
Dimenzija ugaone brzine je:

$$[\omega] = \frac{1}{T}$$

Jedinica kojom se izražava ugaona brzina je $\frac{radijan}{sekund}$ ili s^{-1}.

Treba napomenuti da se ugaona brzina obrtanja tijela oko nepokretne ose, obično u tehnici, mjeri brojem obrtaja u minuti, koji se označava sa *n*, tada je,

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

<u>Srednje ugaono ubrzanje</u>, za interval vremena $\Delta t = t_2 - t_1$, definisano je kao:

$$\varepsilon_{sr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega(t_2)-\omega(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{3.8}$$

Ugaono ubrzanje tijela u datom trenutku vremena *t* je veličina kojoj teži srednje ugaono ubrzanje kada interval vremena teži nuli, pa možemo pisati

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dot{\omega} \qquad \text{ili} \qquad \varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \tag{3.8.a}$$

Ugaono ubrzanje tijela koje se obrće oko nepokretne ose u datom trenutku vremena po intezitetu je jednako prvom izvodu po vremenu ugaone brzine ili drugom izvodu po vremenu ugla obrtanja tijela.

Dimenzija ugaonog ubrzanja je,

$$[\varepsilon] = \frac{1}{T^2}$$

Jedinica kojom se izražava ugaono ubrzanje je $\frac{radijan}{s^2}$ ili s^{-2}.

Treba imati na umu, da su ugaona brzina i ugaono ubrzanje tijela koje se obrće oko nepokretne vektorske veličine.

Ako duž nepokretne ose A_z (*sl.41*), uvedemo jedinični vektor $\vec{k}$, onda se vektor ugaone brzine može napisati u obliku,

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}. \tag{3.9}$$

Pravac vektora ugaone brzine $\vec{\omega}$ je u pravcu nepokretne (obrtne) ose. Vektor $\vec{\omega}$ je usmjeren duž obrtne ose u onu stranu iz koje se vidi obrtanje krutog tijela u smjeru suprotnom od obrtanja kazaljke na satu. Ako je $\omega = \dot{\varphi} < 0$, onda je obrtanje negativno, tj. obrtanje se vrši u smjeru obrtanja kazaljke na satu.

Ugaono ubrzanje kao vektor možemo napisati da je jednako prvom izvodu vektora ugaone brzine tijela,

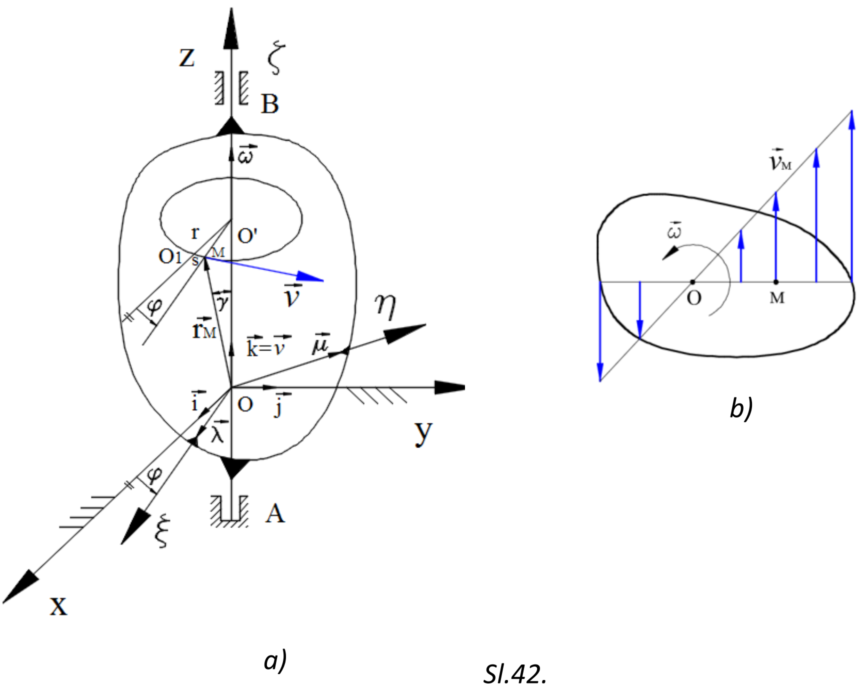
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{3.10}$$

Pošto se hodograf vektora ugaone brzine poklapa sa obrtnom osom A_z, to je vektor ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ takođe usmjeren duž obrtne ose.

U cilju određivanja karaktera promjene intenziteta ugaone brzine tijela koje se obrće oko nepokretne ose, analizira se skalarni proizvod vektora $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\omega}$. Ako je $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\omega} > 0$, tada raste intenzitet ugaone brzine i tijelo se obrće ubrzano, a vektori ugaone brzine i ugaonog ubrzanja imaju iste smjerove. Ako je $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\omega} < 0$, intenzitet ugaone brzine se smanjuje i tijelo se obrće usporeno, a vektori ugaone brzine i ugaonog ubrzanja su tada suprotnih smjerova.

3.3.2. Brzina tačaka tijela koje se obrće oko nepokretne ose

Pri određivanju kinematičkih karakteristika pojedinih tačaka krutog tijela, koje se obrće oko nepokretne ose, polazimo od toga da je ugao obrtanja poznata funkcija vremena, tj. $\varphi = \varphi(t)$. Radi daljih razmatranja, uočimo nepokretni koordinatni sistem O_{xyz} takav da mu se osa O_z poklapa sa osom obrtanja i pokretni Dekartov koordinatni sistem $O_{\xi\eta\zeta}$ kruto vezan za tijelo takav da mu se osa O_ζ poklapa sa osom obrtanja za vrijeme kretanja (*sl.42.a*)



Sl.42.

Neka se u početnom trenutku vremena $t_0 = 0$, pokretni koordinatni sistem $O_{\xi\eta\zeta}$ koji je čvrsto vezan za tijelo, poklapa sa nepokretnim koordinatnim sistemom O_{xyz} (*sl.42.a*). Ako uočimo proizvoljnu tačku *M* krutog tijela, koja je na rastojanju *r* od obrtne ose, gdje je sa *r* označen poluprečnik kružne putanje te tačke, tada se porast lučne koordinate s tačke *M* može iskazati izrazom:

$$s = \widehat{O_1 M} = r\varphi(t) \tag{3.11}$$

Na osnovu rečenog o prirodnom načinu određivanja kretanja tačke, projekcija vektora brzine tačke *M* određena je sa

$$v_T = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(r\varphi) = r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi} = r\omega \tag{3.12}$$

Pravac brzine tačke *M* tijela određen je tangentom na trajektoriju, koja je oblika kružnice poluprečnika *r*, koja pripada ravni upravnoj na osu obrtanja i čiji je centar na osi obrtanja.

Ugaona brzina ω, koja je kinematička karakteristika tijela kao cjeline, jednaka je za sve tačke tijela, pa su brzine pojedinih tačaka tijela pri obrtanju oko nepokretne ose proporcionalne rastojanjima tih tačaka od nepokretne ose (*sl.42.b*).

Tačke tijela koje leže na nepokretnoj osi su nepokretne, tj. brzine tih tačaka su jednake nuli.

<u>Ojlerova formula za određivanje vektora brzine tačke</u>

Vektor brzine $\vec{v}$ proizvoljne tačke *M* tijela, koje se obrće oko nepokretne ose, može se odrediti vektorskim proizvodom vektora ugaone brzine $\vec{\omega}$ i vektora položaja $\vec{r}$ tačke *M* mjerenog od centra O' kružne putanje tačke (*sl.42*):

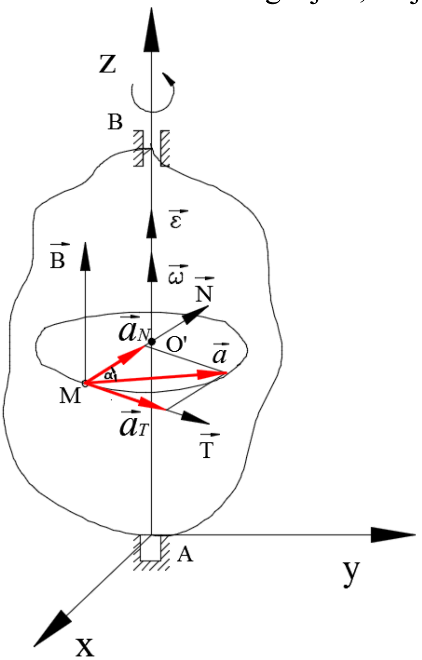
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \left(\overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{OO'}\right) = \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_M} - \vec{\omega} \times \overrightarrow{OO'} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_M} \tag{3.13}$$

Vektori ω i $\overrightarrow{OO'}$ su kolinearni, pa je njihov vektorski proizvod jednak nuli. Formulu (3.13) prvi je izveo L. Ojler i naziva se *Ojlerova formula* za određivanje vektora brzine tačke tijela koje se obrće oko nepokretne ose. Intezitet vektora brzine tačke je:

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_M}| = |\vec{\omega}| \cdot |\overrightarrow{r_M}| \cdot sin\sphericalangle(\vec{\omega}, \overrightarrow{r_M}) = \omega \cdot r_M \cdot sin\gamma = r\omega \quad (3.14)$$

3.3.3. Ubrzanje tačaka tijela koje se obrće oko nepokretne ose

Pošto se tačke krutog tijela, koje se obrće oko nepokretne ose, kreću po kružnim putanjama, najjednostavnije je da se ubrzanje bilo koje tačke M tijela izrazi preko prirodnog postupka definisanja kretanja. U tom cilju u proizvoljnoj tački M konstruisaćemo prirodni trijedar, uočimo oskulatornu ravan određena jediničnim vektorima $\vec{T}$ i $\vec{N}$, tada je tangentno ubrzanje usmjereno duž tangente na kružnu putanju, u pravcu vektora tangente $\vec{T}$, a normalno ubrzanje je usmjereni ka nepokretnoj osi rotacije, u pravcu vektora normale $\vec{N}$ (*sl.43*).



sl.43.

Komponentna tangentnog ubrzanja tačke *M* određena je relacijom,

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega) = r\frac{d\omega}{dt} = r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = r\ddot{\varphi} = r\varepsilon$$

(3.15)

a komponenta normalnog ubrzanja određena je sa,

$$a_N = \frac{v^2}{R_k} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2 = r\dot{\varphi}^2 \qquad (3.16)$$

Intenzitet ukupnog ubrzanja tačke M određen je formulom,

$$|a| = a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (3.17)$$

Vektor ubrzanja proizvoljne tačke tijela, koje se obrće oko nepokretne ose, takođe se može odrediti ako se pođe i od *Ojlerove formula* za vektor brzine tačke. Na taj način vektor ubrzanja proizvoljne tačke *M* određen je kao (*sl.43.a*),

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_M}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{r_M} + \vec{\omega} \times \frac{d\overrightarrow{r_M}}{dt} \tag{3.18}$$

Vektor tangentog ubrzanja određen je sa,

$$\vec{a}_T = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_M \tag{3.19}$$

a vektor normalnog ubrzanja je,

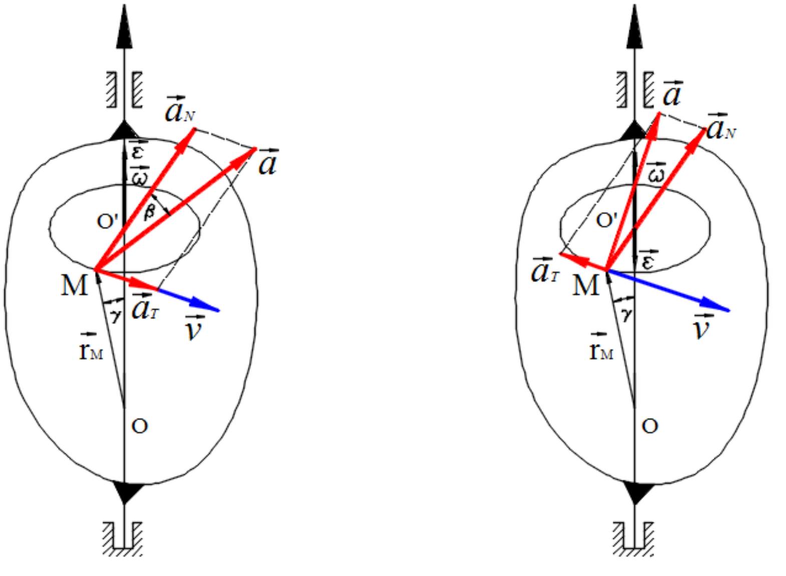
$$\vec{a}_N = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_M}) \tag{3.20}$$

U tom slučaju intenzitet tangentnog ubrazanja je,

$$|\vec{a}_T| = |\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{r_M}| = \varepsilon r_M sin\sphericalangle(\vec{\varepsilon}\,,\overrightarrow{r_M}) = \varepsilon r_M \sin\gamma = \varepsilon r$$

a intenzitet normalnog ubrzanja je,

$$|\vec{a}_N| = |\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega v sin\sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{v}) = \omega v sin 90° = \omega v = r\omega^2$$



sl. 43.a

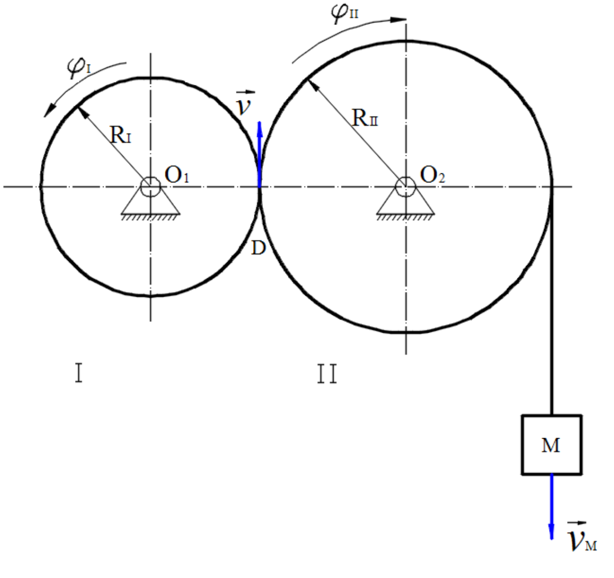
Prema tome, vektor ubrzanja proizvoljne tačke M tijela koje se obrće oko nepokretne ose određen je vektorskim zbirom tangentnog i normalnog ubrzanja, odnosno

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \tag{3.21}$$

Vektor normalnog ubrzanja $\vec{a}_N$ usmjeren je ka nepokretnoj osi rotacije tijela, dok je pravac vektora tangentnog ubrzanja $\vec{a}_T$ upravan na vektore $\vec{r}\ i\ \vec{\varepsilon}$, tj. poklapa se sa pravcem vektora brzine $\vec{v}$ tačke. Smjer vektora $\vec{a}_T = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_M$, u slučaju kada su vektori $\vec{\omega}\ i\ \vec{\varepsilon}$ orjentisani u istu stranu, je u pravcu vektora brzine tačke $\vec{v}$. Kada su vektori $\vec{\omega}\ i\ \vec{\varepsilon}$ suprotni tada je smjer vektora $\vec{a}_T$ suprotan od vektora brzine tačke $\vec{v}$ (*sl43.a*).

Zadaci

<u>Zadatak 3.1.</u> Disk I se obrće oko nepokretne ose po zakonu $\varphi_I = 4t^2\ [rad]$, pri čemu se vrijeme t mjeri u sekundama. Disk I je spregnut sa diskom II na čijem kraju je okačen teret M (*sl.3.1*). Odrediti brzinu spuštanja tereta M, ako je $R_I = 0{,}6\ m\ i\ R_{II} = 0{,}8\ m$.



sl. 3.1.

Rješenje:
Pošto je tačka D zajednička tačka za oba diska, to je i linijska brzina u toj tački za oba diska ista, pa je brzina tačke D, kao tačke diska I

$$v = R_I \cdot \omega_I,$$

pri čemu se ugaona brzina diska I dobija kao vremenski izvod zakona obrtanja φ_I:

$$\omega_I = \frac{d\varphi_I}{dt} = \dot{\varphi}_I = 8t \ [s^{-1}].$$

pa je intenzitet brzine tačke D jednak,

$$v = 0{,}6 \cdot 8t = 4{,}8t \ \left[\frac{m}{s}\right].$$

Ako posmatramo tačku D kao tačku diska II, onda je,

$$v = R_{II} \cdot \omega_{II},$$

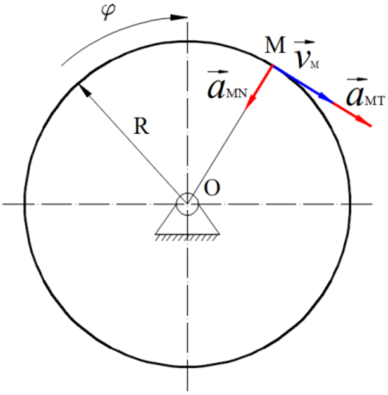
iz čega se dobija ugaona brzina diska II, kao

$$\omega_{II} = \frac{v}{R_{II}} = \frac{4{,}8t}{0{,}8} = 6t \ [s^{-1}].$$

Sada se brzina spuštanja tereta M može dobiti kao

$$v_M = R_{II} \cdot \omega_{II} = 0{,}8 \cdot 6t = \mathbf{4{,}8}\boldsymbol{t} \ \left[\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}\right].$$

Zadatak 3.2. Kružni disk poluprečnika $R = 0{,}1 \ m$, obrće se po zakonu $\varphi = 4t^2 \ [rad]$, pri čemu se vrijeme *t* mjeri u sekundama (*sl.3.2*). Odrediti brzinu i ubrzanje tačke *M* koja se nalazi na obodu diska.



sl.3.2.

Rješenje:
Pošto je poznat zakon promjene ugla φ, to je ugaona brzina kružnog diska

$$\omega = \dot{\varphi} = 8t$$

Brzina tačke *M* određena je sa

$$v_M = R\omega = R\frac{d\varphi}{dt} = R\dot{\varphi}$$

$$v_M = 0{,}1 \cdot 8t = \mathbf{0{,}8}\boldsymbol{t}\ \left[\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}\right]$$

Ukupno ubrzanje tačke *M* sastoji se iz dvije komponente ubrzanja: tangentnog i normalnog.
Tangentno ubrzanje se određuje kao prvi izvod linijske brzine tačke *M* po vremenu, tj.
$a_{MT} = \frac{dv_M}{dt}$, što iznosi

$$a_{MT} = 0{,}8\ \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Normalno ubrzanje tačke M je:

$a_{MN} = \frac{v_M^2}{R} = \frac{0{,}64t^2}{0{,}1}$, što iznosi

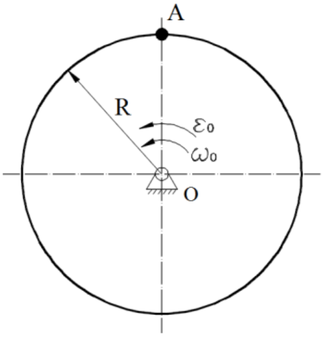
$$a_{MN} = 6{,}4\ \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Ukupno ubrzanje tačke M je

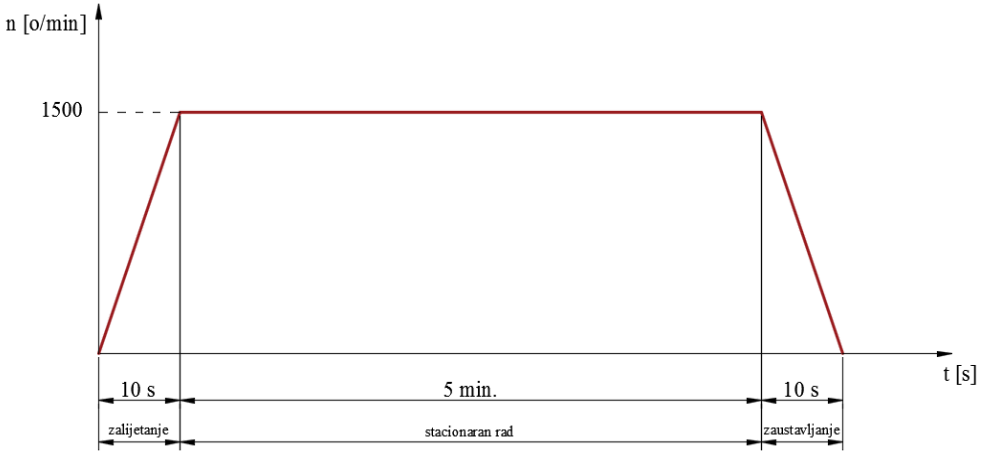
$a_M = \sqrt{a_{MT}{}^2 + a_{MN}{}^2} = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}64^2}$, odnosno

$$\boldsymbol{a_M} = \mathbf{1{,}02}\ \left[\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s^2}}\right].$$

<u>Zadatak 3.3</u>. Rotor mašine, poluprečnika $R = 0{,}5\ m$, tokom rada ima promjenljiv broj obrtaja kao na slici (*sl.3.3*).



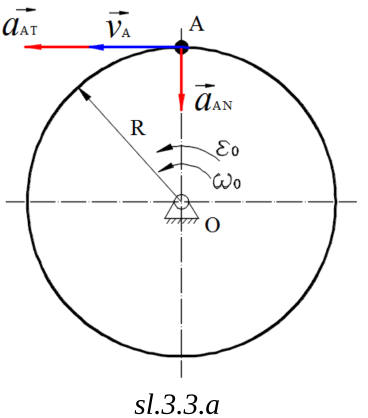
Naći brzinu i ubrzanje tačke A rotora, koja se nalazi na njegovom obodu, u svim režimima njegovog rada mašine: zalijetanje (jednako ubrzano kretanje), stacionaran rad (jednoliko kretanje) i zaustavljanje mašine (jednako usporeno kretanje).



sl.3.3.

Rješenje:

a) **Režim zalijetanja mašine**



sl.3.3.a

Broj obrtaja rotora mašine tokom zalijetanja se mijenja po linearnom zakonu (*sl.3.3*), pa možemo napisati da je

$$n = \frac{1500}{10} t = 150\, t \quad \left[\frac{o}{min}\right]$$

Ugaona brzina rotora, kada je poznat broj obrataja rotora, određena je izrazom

$$\omega = \frac{\pi\, n}{30} = \frac{\pi\, 150\, t}{30} = 5\pi t \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Ugaono ubrzanje rotora je,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 5\pi \quad \left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

Brzina tačke A, koja se nalazi na obodu rotora jednaka je

$$v_A = R \cdot \omega = 0{,}5 \cdot 5\pi t = 2{,}5\pi t \ \left[\frac{m}{s}\right].$$

U prirodnom definisanju kretanja, tangentna komponenta ubrzanja tačke A je

$$a_{AT} = R \cdot \varepsilon = 0{,}5 \cdot 5\pi = 2{,}5\pi \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

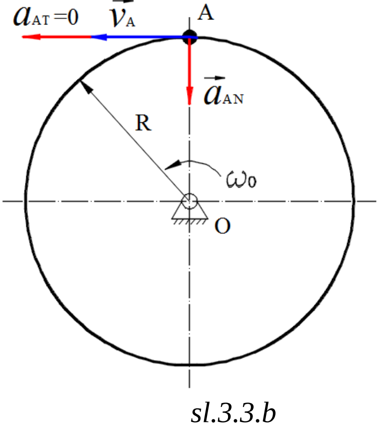
a komponenta normalnog ubrzanja tačke je

$$a_{AN} = \frac{{v_A}^2}{R} = \frac{(2{,}5\pi t)^2}{0{,}5} = 12{,}5\pi^2 t^2 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Pa je intenzitet ukupnog ubrzanja tačke A, u ovom režimu rada mašine određen sa,

$$a_A = \sqrt{{a_{AT}}^2 + {a_{AN}}^2} = \sqrt{(2{,}5\pi)^2 + (12{,}5\pi^2 t^2)^2} = \mathbf{2,5\pi\sqrt{1 + 25\pi^2 t^4}} \ \left[\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s^2}}\right].$$

b) <u>stacionaran rad mašine</u>



sl.3.3.b

U stacionarnom ražimu rada, ugaona brzina rotora je konstantna (*sl.3.3*), i iznosi

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi\, 1500}{30} = 50\pi\ \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Pa je ugaono ubrzanje rotora $\varepsilon = 0$.

Brzina tačke A na obodu rotora je,

$$v_A = R \cdot \omega = 0{,}5 \cdot 50\pi = 25\pi\ \left[\frac{m}{s}\right]$$

Tangenta komponenta ubrzanja jednaka je nuli, odnosno

$$a_{AT} = R \cdot \varepsilon = 0 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

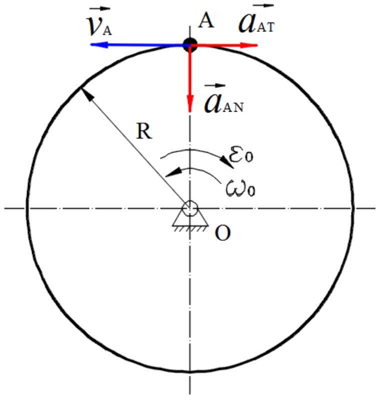
a normalna komponeta ubrzanja tačke A je

$$a_{AN} = \frac{{v_A}^2}{R} = \frac{(25\pi)^2}{0{,}5} = 1250\pi^2 \left[\frac{m}{s^2}\right],$$

pa je intenzitet ukupnog ubrzanja tačke A, u stacionarnom režimu rada,

$$a_A = \sqrt{{a_{AT}}^2 + {a_{AN}}^2} = \mathbf{1250\pi^2}\ \left[\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s^2}}\right].$$

c) <u>Zaustavljanje mašine</u>



sl.3.3.c

U režimu zaustavljanja mašine (*sl.3.3*), ugaona brzina rotora, se mijenja po zakonu

$$\omega = \omega_0 - 5\pi t = 50\pi - 5\pi t \ \ [s^{-1}]$$

pa je ugaono ubrzanje rotora,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -5\pi \ \ [s^{-2}]$$

Ovdje se vidi da je ugaono ubrazanje rotora u ovom režimu rada negativno, što znači da imamo usporenje rotora.

Brzina tačke A rotora je,

$$v_A = R \cdot \omega = 0{,}5 \cdot (50\pi - 5\pi t) = 0{,}5 \cdot (50\pi - 5\pi t) \ \left[\frac{m}{s}\right].$$

Tangentna komponenta ubrzanja tačke A je,

$$a_{AT} = R \cdot \varepsilon = 0{,}5 \cdot (-5\pi) = -2{,}5\pi \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

a nornalna komponenta ubrzanja je,

$a_{AN} = \frac{{v_A}^2}{R} = \frac{\left(0{,}5 \cdot (50\pi - 5\pi t)\right)^2}{0{,}5}$, odnosno

$$a_{AN} = 0{,}25 \cdot (2500\pi^2 - 500\pi^2 t + 25\pi^2 t^2) \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Intenzitet ubrzanja tačke A tokom zaustavljanja mašine određen je sa

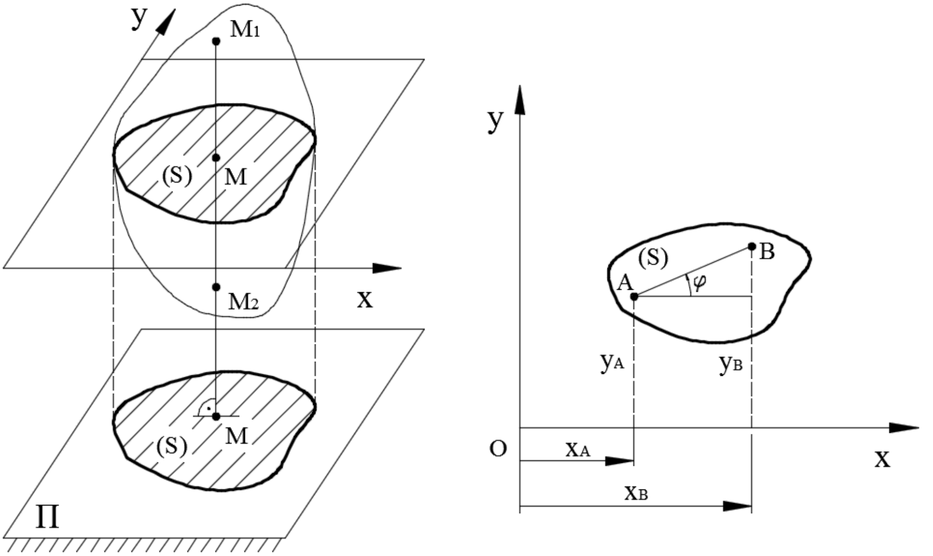
$$a_A = \sqrt{{a_{AT}}^2 + {a_{AN}}^2} = \sqrt{(-2{,}5\pi)^2 + \left(0{,}25 \cdot (2500\pi^2 - 500\pi^2 t + 25\pi^2 t^2)\right)^2}$$

odnosno,

$$\boldsymbol{a_A} = \sqrt{\mathbf{6,25\boldsymbol{\pi}^2 + (0,0625 \cdot (2500\boldsymbol{\pi}^2 - 500\boldsymbol{\pi}^2\boldsymbol{t} + 25\boldsymbol{\pi}^2\boldsymbol{t}^2)^2)}} \ \left[\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}^2}\right]$$

3.4. RAVNO KRETANJE KRUTOG TIJELA

Ravno kretanje krutog tijela je takvo kretanje pri kome se sve tačke tijela kreću paralelno prema nekoj nepokretnoj ravni Π, odnosno kada su vektori brzina svih tačaka tijela paralelni prema nekoj nepokretnoj ravni Π (*sl.44.*).



sl.44.

Sve tačke tijela koje leže na pravoj koja prolazi kroz tačke *M_1,M i M_2*, koja je upravna na nepokretnoj ravni *Π,* kreću se na isti način, tj. imaju jednake trajektorije, brzine i ubrzanja. Zbog toga je dovoljno proučiti kretanje presjeka (*S)* tog tijela u ravni O_{xy} koja je paralelna sa nepokretnom ravni *Π.* Presjek (*S)* zovemo *ravnom figurom*. Položaj presjeka S u ravni O_{xy}, u potpunosti je određen ako se zna položaj dveju tačaka $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ tog presjeka, u odnosu na Dekartov koordinatni sistem.

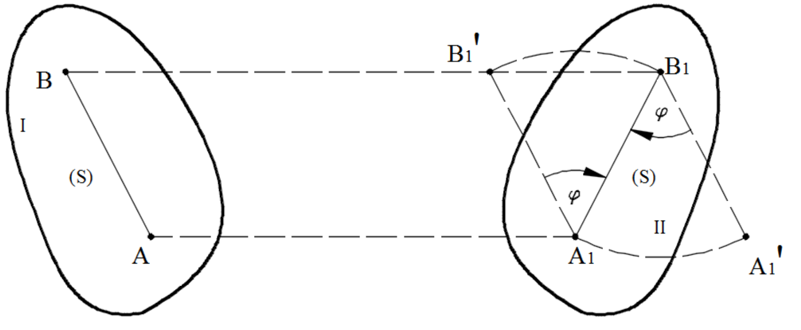
Od ove četiri Dekartove koordinate tri su nezavisne, a četvrta sobzirom da je rastojanje između ovih dveju tačaka nepromjenjivo, određena je izrazom

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2 \tag{3.22}$$

Prema tome, ravno kretanje tijela određeno je sa tri nezavisna parametra (koordinate), što znači da tijelo ima tri stepena slobode, tj. može da izvodi tri nezavisna kretanja: dvije translacije duž osa *x i y* i jednu rotaciju oko ose upravne na ravan presjeka (*S)*.

Razlaganje ravnog kretanja krutog tijela na translatorno i obrtno kretanje

Pri prelasku ravne figure (*S*) iz jednog u drugi položaj, iz položaja I u položaj *II*, ravno kretanje možemo razložiti na translatorno i obrtno kretanje. Tada se duž $\overline{AB}$ koja je čvrsto vezana za ravnu figuru (*S*) premjesti u položaj $\overline{A_1B_1}$. Figuru (*S*) najprije pomjerimo translatorno tako da se tačka *A*, koju zovemo polom translacije, poklopi sa tačkom A_1, a zatim izvršimo rotaciju figure, obrtanje oko pola, za ugao φ oko ose koja prolazi kroz tačku A_1 (*sl.45.*).



sl.45.

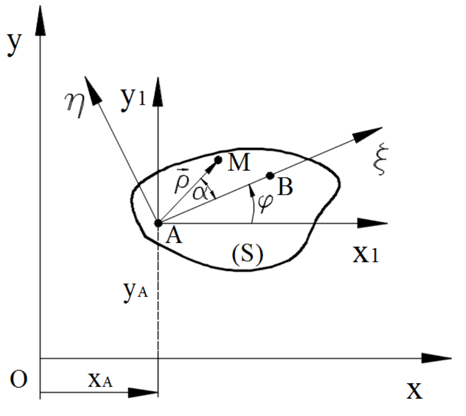
Kinematičke karakteristike tijela kao cijeline pri ravnom kretanju tijela su: vektor brzine $\overrightarrow{v_A}$ i vektor ubrzanja $\vec{a}_A$ pola A pri translatornom kretanju ravne figure kao i vekotr ugaone brzine $\vec{\omega}_{rk}$ i vektor ugaonog ubrzanj $\vec{\varepsilon}_{rk}$ obrtanja tijela oko ose koja prolazi kroz pol *A*, koji se nazivaju ugaona brzina i ugaono ubrzanje ravnog kretanja.

Sa promjenom pola ravne figure mijenjaju se kinematičke karakteristike translatornog kretanja tijela, dok ugaone kratakteristike koje karakterišu obrtno kretanje ostaju nepromjenjene ne zavise od izbora tačke pola.

3.4.1. Jednačine kretanja ravne figure

Pri određivanju jednačina kretanja ravne figure u odnosu na nepokretni Dekartov koordinatni sistem u ravni O_{xy}, definišimo translatorno pokretni Dekartov koordinatni sistem $A_{x_1y_1}$ postavljen u proizvoljnom polu

translacije *A*, koju nazivamo polom translacije, i pokretni Dekartov koordinatni sistem $A_{\xi\eta}$ kruto vezan za tijelo u tački *A* (*sl.46*).
Položaj ravne figure, odnosno tijela u odnosu na nepokretni koordinatni sistem O_{xy}, određen je ako je poznat položaj pokretnog koordinatnog sistema $A_{\xi\eta}$ u odnosu na nepokretni koordinatni sistem. Tako, položaj ravne figure (*S*) u ravni O_{xy}, određen je ako je poznat položaj proizvoljno izabrane tačke *A*, odnosno ako su poznate koordinate x_A, y_A i ugao φ, koju obrazuje duž $\overline{AB}$ figure *(S)* u odnosu na nepokretnu osu *Ox*, tj. ugao između osa A_{x_1} i A_{ξ}.



sl.46.

Položaj ravne figure, u odnosu na nepokretni koordinatni sistem O_{xy}, u svakom trenutku poznat je ako su poznate funkcije oblika

$$\begin{aligned} x_A &= x_A(t) \\ y_A &= y_A(t) \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Jednačine (3.23) nazivaju se *jednačine kretanja ravne figure*.

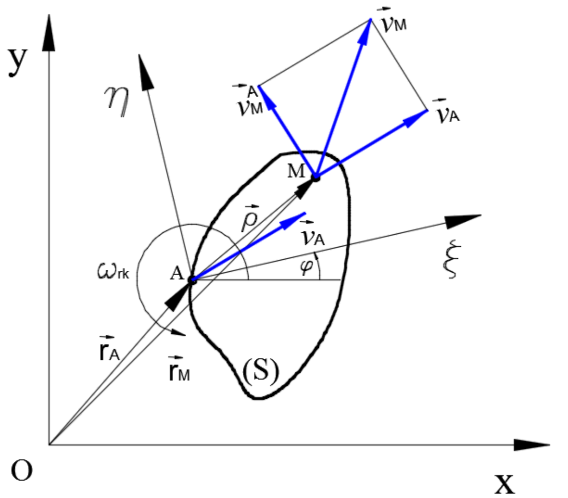
Prve dvije jednačine određuju translatorno ravne figure, a treća jednačina određuje obrtanje tijela oko ose koja prolazi kroz proizvoljno izabran pol translacije A, u ravni figure *S* i upravna je na ravan figure.
Konačne jednačine kretanja (zakon kretanja) proizvoljne tačke M ravne figure (*S*) u odnosu na nepokretni sistem referencije moguće je odrediti, korištenjem poznatog vektora položaja $\vec{\rho}$ tačke M u odnosu na tačku A i ugla α kojeg taj vektor obrazuje sa osom Aξ pokretnog sistema referencije A$\xi\eta$ koji je vezan za ravnu figuru S, kao

$$x_M = x_A + \overline{AM}\cos(\varphi + \alpha)$$
$$y_M = y_A + \overline{AM}\sin(\varphi + \alpha) \tag{3.24}$$

3.4.2. Brzine tačaka tijela koje vrši ravno kretanje

Položaj proizvoljne tačke *M* ravne figure *(S)*, u odnosu na nepokretni koordinatni sistem O_{xy}, određen je vektorom položaja, kao (*sl.47.*)

$$\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{r_A} + \vec{\rho} \qquad (\vec{\rho} = \overrightarrow{AM}) \tag{3.25}$$



sl.47.

Po definiciji, vektor brzine tačke *M* ravne figure određena je sa:

$$\overrightarrow{v_M} = \frac{d\overrightarrow{r_M}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{r_A} + \vec{\rho}) = \frac{d\overrightarrow{r_A}}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \overrightarrow{v_A} + \vec{v}_M^A \tag{3.26}$$

Veličina $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_M^A$ je brzina koju tačka M ima usljed obrtanja ravne figure *S* oko ose A_ζ koja prolazi kroz pol *A* a uprvana je na ravan figure (*S*), i ova brzina se naziva brzina tačke *M* oko pola *A* (*sl.48.*).

Takođe, koristeći Ojlerovu formulu za brzinu tačke može se napisati,

$$\vec{v}_M^A = \vec{\omega}_{rk} \times \vec{\rho} \tag{3.27}$$

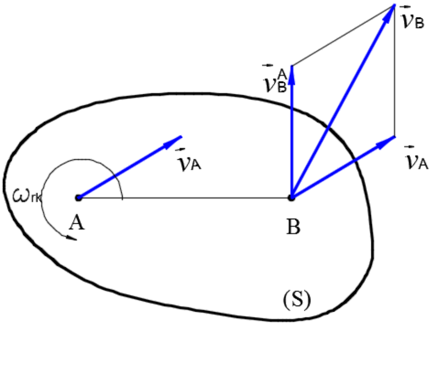
Sada je vektor brzina tačke M, određen sa

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{rk} \times \vec{\rho} \tag{3.28}$$

Intezitet vektora brzine tačke M oko pola A je,

$$|\vec{v}_M^A| = \omega_{rk}\rho\sphericalangle(\vec{\omega}_{rk}, \vec{\rho}) = \omega_{rk}\rho sin90° = \omega_{rk}\rho = \overline{AM}\omega_{rk} \tag{3.29}$$

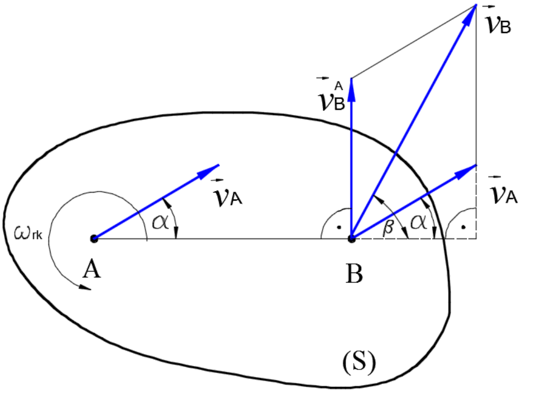
Intezitet obrtne brzine neke tačke tijela je srazmjeran rastojanju te tačke od usvojenog pola A, a smjer vektora brzine zavisi od smjera ugaone brzine ravnog kretanja.



sl.48.

a) __Teorema o projekcijama vektora brzina tačaka ravne figure__

Projekcije brzina dvaju tačaka ravne figure, $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$, na pravu koja spaja te dvije tačke, jednake su jedna drugoj.



sl.49.

Brzina tačke B određena je izrazom:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A$$

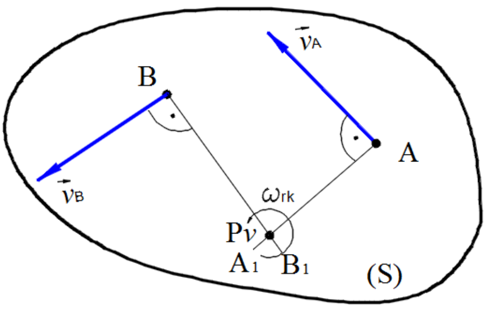
Projektovanjem ove jednačine na pravac prave, koja prolazi kroz tačke *A i B*, uzimajući u obzir da je $\vec{v}_B^A \perp \overline{AB}$, dobija se izraz (*sl.49.*):

$$v_B cos\beta = v_A cos\alpha \tag{3.30}$$

koji potvrđuje datu teoremu.

b) Trenutni pol brzina ravne figure

Pri ravnom kretanju krutog tijela, koje nije translatorno, u svakom trenutku vremena postoji u ravni figure S jedna tačka čija je brzina jednaka nuli i ta se tačka naziva *trenutni pol brzina ravne figure (S)* (*sl.50.*).



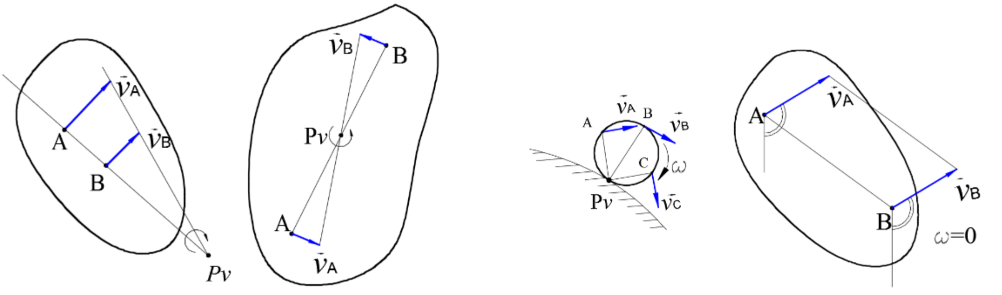
sl.50.

Neka su u trenutku *t* brzina tačaka *A* i *B*, $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$, pri čemu vektor brzina nisu međusobno paralelni. Tačka P_v ravne figure (*S*) koja je određena presjekom pravih $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$, pri ćemu su ove prave upravne na vektore brzina $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ respektivno, ima u datom trenutku t brzinu jednaku nuli $\vec{v}_{pv}$ =0 i to je trenutni pol brzina ravne figure (*S*) za dati trenutak vremena *t*.

Postojanje trenutnog pola brzine moguće je dokazati korišćenjem teoreme o projekcijama brzina: vektor brzine $\vec{v}_{pv}$ pola P_v morao bi jednovremeno da bude upravan na dvije prave, $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$, što je nemoguće, pa slijedi da teorema o projekcijama brzina može biti zadovoljena samo za $\vec{v}_{pv}$ = 0.

Pri kretanju ravne figure (*S*) položaj trenutnog pola brzine P_v se stalno mijenja i svakom trenutku vremena odgovara poseban položaj pola brzina ravne figure, pa se stoga naziva trenutni pola brzina.

Pri određivanju trenutnog pola brzina ravne figure mogući su različiti slučajevi (*sl.51).*



a) *b)* *c)* *d)*

sl.51.

I) Brzina dvije tačke ravne figure, koje pripadaju jednoj pravoj, međusobno su paralelne i upravne na tu pravu. Zavisno od smjerova tih brzina razlikuju se dva slučaja prikazana na slici (*sl.51.a. i sl.51.b.*).

- Ako su brzine tačaka A i B ravne figure istog smjera, a različitih intenziteta (*sl.51.a*), intenzitet ugaone brzine i položaj trenutnog pola brzina ravne figure može se odrediti na sledeći način. Najprije se odrede brzine tačaka A i B preko pola brzina uzetog za pol translacije

$$v_A = v_A^{P_v} = (\overline{AB} + \overline{BP_v})\omega, \qquad v_B = v_B^{P_v} = \overline{BP_v}\omega$$

slijedi da je,

$$\omega = \frac{v_A - v_B}{\overline{AB}} \text{ i } \overline{BP_v} = \frac{v_B}{v_A - v_B}\overline{AB}$$

- Ako su brzine tačaka A i B ravne figure različitih smjerova i intenziteta (*sl.51.b*), na analogan način se nalazi

$$v_A = v_A^{P_v} = (\overline{AB} - \overline{BP_v})\omega, \qquad v_B = v_B^{P_v} = \overline{BP_v}\omega$$

pa slijedi da je,

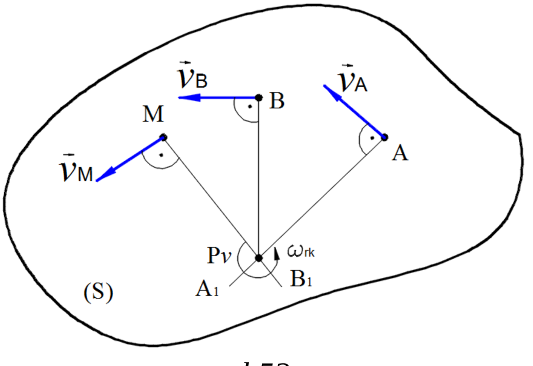
$$\omega = \frac{v_A + v_B}{\overline{AB}} \text{ i } \overline{BP_v} = \frac{v_B}{v_A + v_B}\overline{AB}$$

II) Ako se tijelo kreće po površini drugog tijela, pri čemu oba tijela u tački dodira imaju zajedničku tangentu, a brzine dodirnih tačaka su jednake, kaže se da se tijelo kotrlja bez klizanja. Poseban je slučaj kada se posmatrano tijelo kreće po površini nepokretnog tijela (*sl.51.c*). U tom slučaju i brzina tačke tijela koja je u dodiru sa nepokretnim tijelom ima brzinu jednaku nuli pa je i trenutni pol brzina na mjestu dodira ta dva tijela.

III) Brzine dveju tačaka ravne figure međusobno su paralelne, istih smjerova i jednakih intenziteta (*sl.51.d*). U ovom slučaju je ugaona brzina tijela $\omega = 0$, odnosno riječ je o trenutnom translatornom rasporedu brzina tačaka ravne figure.

c) ***<u>Određivanje brzina tačaka ravne figure pomoću trenutnog pola brzina</u>***

Brzina bilo koje tačke ravne figure (*S)* u datom trenutku vremena jednaka je obrtnoj brzini tačke koju ona ima pri obrtanju ravne figure oko ose koja prolazi kroz trenutni pol brzina P_v , a upravna je na ravan firure (*sl.52*).



sl.52.

Iz definicije brzine proizvoljne tačke ravne figure, ukoliko se za pol uzme trenutni pol brzina P_v, slijedi da je

$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= \vec{v}_{Pv} + \vec{v}_A^{Pv}\\ \vec{v}_B &= \vec{v}_{Pv} + \vec{v}_B^{Pv}\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \vec{v}_M &= \vec{v}_{Pv} + \vec{v}_M^{Pv}\end{aligned} \tag{3.31}$$

Kako je $\vec{v}_{Pv} = 0$, slijedi da je,

$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= \vec{v}_A^{Pv}\\ \vec{v}_B &= \vec{v}_B^{Pv}\\ &\dots\dots\dots\\ &\dots\dots\dots\\ \vec{v}_M &= \vec{v}_M^{Pv}\end{aligned} \tag{3.31a}$$

Pa su inteziteti ovih brzina određeni su izrazima:

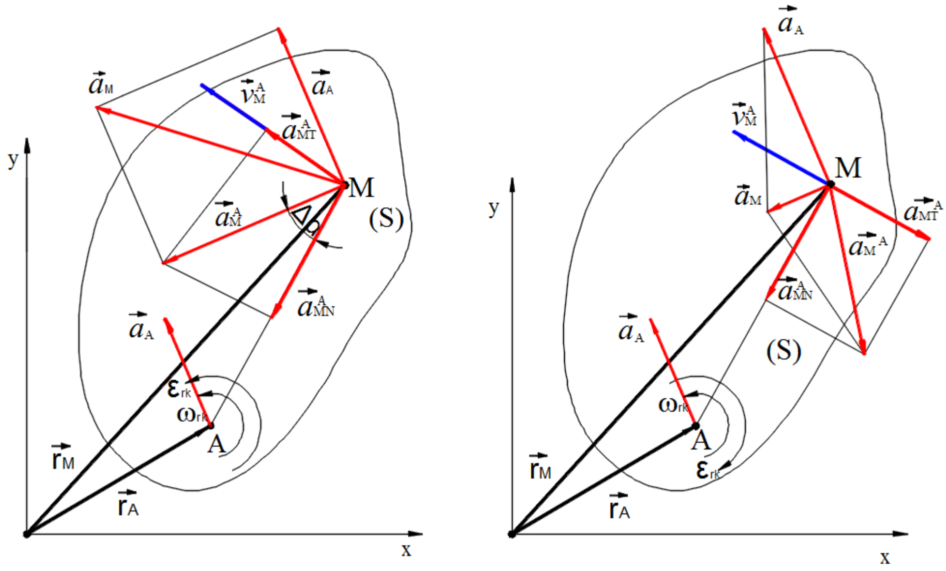
$$\begin{aligned}v_A &= \overline{AP_v}\omega_{rk}\\ v_B &= \overline{BP_v}\omega_{rk}\\ &\dots\dots\dots\\ &\dots\dots\dots\\ v_M &= \overline{MP_v}\omega_{rk}\end{aligned} \tag{3.31b}$$

Intezitet brzine bilo koje tačke ravne figure S jednak je proizvodu trenutnog polupřečnika obrtanja i ugaone brzine ravnog kretanja krutog tijela.
Trenutna vrijednost ugaone brzine ravne figure S određena je sa:

$$\omega_{rk} = \frac{v_A}{\overline{AP_v}} = \frac{v_B}{\overline{BP_v}} = \cdots = \frac{v_M}{\overline{MP_v}} \tag{3.32}$$

3.4.3. Ubrzanje tačaka krutog tijela koje vrši ravno kretanje

Posmatrajmo proizvoljnu tačku *M* ravne figure, određena sa vektorom položaja $\overrightarrow{r_M}$ (*sl.53*), koja ima brzinu $\overrightarrow{v_M}$.



sl.53.

Ubrzanje proizvoljne tačke *M*, ravne figure *(S)*, dobićemo diferenciranjem po vremenu vektora brzine tačke *M*, koristeći jenačinu (3.26), slijedi da je

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_A + \vec{v}_M^A) = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{v}_M^A}{dt} = \vec{a}_A + \vec{a}_M^A$$

ili,

$$\vec{a}_M = \frac{d^2\vec{r}_M}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_A + \vec{\rho}) = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = \vec{a}_A + \vec{a}_M^A \qquad (3.33)$$

Ubrzanje $\vec{a}_M^A$ je ubrzanje tačke *M* koje ona ima usljed obrtanja ravne figure (*S*) oko ose koja prolazi kroz pol *A* a upravnja je na ravan figure (*S*), i naziva se *ubrzanje tačke M oko pola A.*

Pošto se pri obrtnom kretanju ravne figure (*S*) tačka *M* kreće po kružnoj putanji, čiji se centar nalazi u polu *A* koji tada smatramo da miruje, to se obrtno ubrzanje $\vec{a}_M^A$ tačke *M* može izraziti u obliku vektorskog zbira dvije komponente ubrzanja, jedne usmjerene duž normale i druge usmjerene duž tangente na tu kružnu putanju, tj.

$$\vec{a}_M^A = \vec{a}_{MN}^A + \vec{a}_{MT}^A \qquad (3.34)$$

Komponenta $\vec{a}_{MN}^{A}$ naziva se *normalno ubrzanje tačke M oko pola A*, a komponenta $\vec{a}_{MT}^{A}$ naziva se tangentno ubrzanje tačke *M* oko pola *A*.

Vektor *tangentnog ubrzanja* $\vec{a}_{MT}^{A}$, tačke *M* oko pola *A*, usmjeren je po tangenti na kružnu putanju pri obrnom kretanju tačke M, tj. uvijek je normalan na vektore $\overrightarrow{AM}$ i $\vec{\varepsilon}$, odnosno ima pravac obrtne komponente vektora brzine $\vec{v}_{M}^{A}$.

Vektor *normalnog ubrzanja* $\vec{a}_{MN}^{A}$, tačke *M* oko pola *A*, usmjeren je po normali na kružnu putanju pri obrtnom kretanju tačke *M*, tj, ima pravac vektora $\overrightarrow{AM}$ ($\vec{a}_{MN} \| \overline{MA}$) i smjer od tačke *M* ka polu *A*.
Inteziteti ovih komponenti ubrzanja tačke M su,

$$|\vec{a}_{MN}| = \overline{AM}\omega_{rk}^{2} \tag{3.35}$$

$$|\vec{a}_{MT}| = \overline{AM}\varepsilon_{rk} \tag{3.36}$$

Tako da je, intezitet ubrzanja tačke *M* oko pola *A* jednak

$$a_{M}^{A} = \sqrt{(a_{MN}^{A})^{2} + (a_{MT}^{A})^{2}} = \overline{AM}\sqrt{\omega_{rk}^{4} + \varepsilon_{rk}^{2}} \tag{3.37}$$

a ugao koji vektor $\vec{a}_{M}^{A}$ gradi sa vektorom $\overrightarrow{AM}$ određen je sa

$$tg\alpha = \frac{a_{MT}^{A}}{a_{MN}^{A}} = \frac{|\varepsilon_{rk}|}{\omega_{rk}^{2}} => \alpha = arctg\frac{|\varepsilon_{rk}|}{\omega_{rk}^{2}} \tag{3.38}$$

Pošto je jednačinama (3.34), (3.35) i (3.36) jednoznačno određeno obrtno ubrzanje tačke *M* oko pola *A*, to se izraz (3.33) za ubrzanje proizvoljne tačke M ravne figure može napisati u obliku,

$$\vec{a}_{M} = \vec{a}_{A} + \vec{a}_{M}^{A} = \vec{a}_{A} + \vec{a}_{MN}^{A} + \vec{a}_{MT}^{A} \tag{3.39}$$

Ako pol *A* vrši proizvoljno krivolinijsko kretanje, onda se i ubrzanje pola *A* može izraziti preko prirodnih komponenti ubrzanja, normalnog $\vec{a}_{AN}$ i tangentnog ubrzanja $\vec{a}_{AT}$ tačke A, pa se formula (3.39) svodi na oblik,

$$\vec{a}_{M} = \vec{a}_{AN} + \vec{a}_{AT} + \vec{a}_{MN}^{A} + \vec{a}_{MT}^{A} \tag{3.40}$$

Prema tome, *ubrzanje bilo koje tačke M ravne figure (S) jednako je vektorskom (geometsijskom) zbiru ubrzanja tačke A koja je uzeta za pol i obrtnog ubrzanja tačke M oko pola A pri njenom obrtanju sa telom oko ose koja prolazi kroz pola A a upravna je na ravan figure (S) (sl.53).*

Takođe, vektor ubrzanja tačke *M*, može se odrediti polazeći od *Oilerove formule* za vektor brzine tačke *M*, koristeći formulu (3.28), kao

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_A + \vec{\omega}_{rk} \times \vec{\rho}) == \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_{rk}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_{rk} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} \tag{3.40}$$

Sada se vektor ubrzanja proizvoljne tačke *M* tijela, koje vrši ravno kretanje, može napisati u obliku,

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{rk} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_{rk} \times \vec{v}_M^A \tag{3.41}$$

gdje je,

$$\vec{\varepsilon}_{rk} \times \vec{\rho} = \vec{a}_{MT}^A \tag{3.42}$$

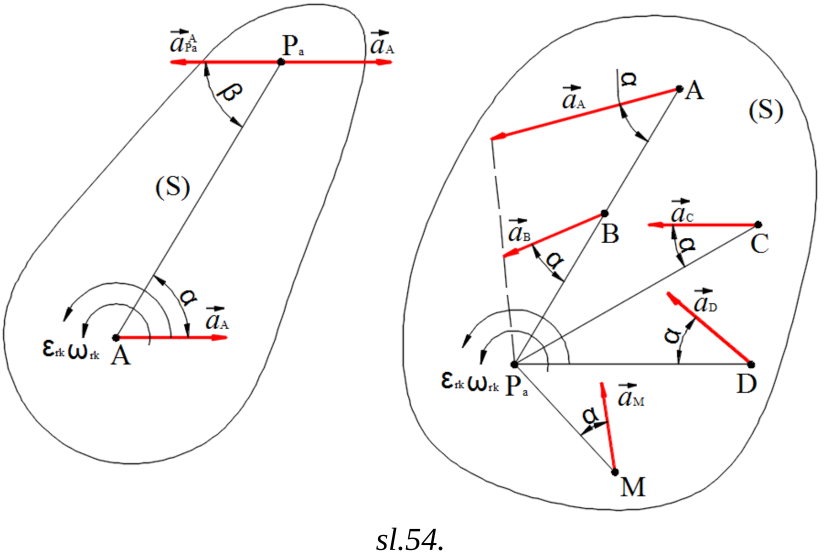
obrtno tangentno ubrzanje tačke M oko pola A, a član

$$\vec{\omega}_{rk} \times \vec{v}_M^A = \vec{a}_{MN}^A \tag{3.43}$$

je *obrtno normalno ubrzanje tačke M oko pola A*.

a) Trenutni pol ubrzanja ravne figure

Pri ravnom kretanju krutog tijela u svakom trenutku vremena postoji tačka P_a ravne figure (*S*) čije je ubrzanje jednako nuli i ta tačka se naziva trenutni pol ubrzanja (*sl.54*).



sl.54.

Položaj trenutnog pola ubrzanja odrediti se tako da se zakrene pravac vektora ubrzanja $\vec{a}_A$ neke tačke A za ugao α u smjeru ugaonog ubrzanja, a zatim se na tako konstruisanom pravu prenese odsječak $\overline{AP_a}$. Kraj P_a odsječka $\overline{AP_a}$ jeste trenutni pol ubrzanja ravne figure, tj. to je tačka ravne figure *(S)* čije je ubrzanje u datom trenutku vremena jednako nuli. Ugao α i odsječak $\overline{AP_a}$ određeni su sa,

$$tg\alpha = \frac{|a_{MT}^{A}|}{|a_{MN}^{A}|} = \frac{|\varepsilon_{rk}|}{\omega_{rk}^{2}} => \ \alpha = arctg\frac{|\varepsilon_{rk}|}{\omega_{rk}^{2}}, \text{ i} \tag{3.44}$$

$$\overline{AP_a} = \frac{a_A}{\sqrt{\omega_{rk}^{4}+\varepsilon_{rk}^{2}}} \tag{3.45}$$

Kada je poznat položaj trenutnog pola ubrzanja P_a ravne figure i ako njega usvojimo za pol, onda se ubrzanje bilo koje tačke B ravne figure može odrediti relacijom,

$$\vec{a}_{B=}\vec{a}_{Pa} + \vec{a}_{B}^{Pa} = \vec{a}_{B}^{Pa} \tag{3.46}$$

jer je $\vec{a}_{Pa} = 0$, pa se može reći da je *ubrzanje bilo koje tačke B ravne figure (S) određeno kao ubrzanje tačke pri njenom obrtnom kretanju zajedno sa ravnom figurom oko trenutnog pola ubrzanja* (*sl.54*).
Na osnovu ovoga, može se napisati,

$$\vec{a}_{B=}\vec{a}_{BN}^{Pa} + \vec{a}_{BT}^{Pa} \tag{3.47}$$

gdje su $\vec{a}_{BN}^{Pa}$ i $\vec{a}_{BT}^{Pa}$, obrtno normalno i obrtno tangentno ubrzanje tačke B oko pola P_a, pa je intenzitet ubrzanja tačke B, analogno sa (3.37), određen relacijom

$$a_B = a_B^{Pa} = \overline{BP_a}\sqrt{\omega_{rk}^{4} + \varepsilon_{rk}^{2}} \tag{3.48}$$

Pri poznatom položaju trenutnog pola ubrzanja P_a intenziteti ubrzanja pojedinih tačka ravne figure (*S*) određuju se relacijom (*sl.54*),

$$a_A = a_A^{Pa} = \overline{AP_a}\sqrt{\omega_{rk}^{4} + \varepsilon_{rk}^{2}}$$

$$a_C = a_C^{Pa} = \overline{CP_a}\sqrt{\omega_{rk}^4 + \varepsilon_{rk}^2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3.49)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_B = a_B^{Pa} = \overline{BP_a}\sqrt{\omega_{rk}^4 + \varepsilon_{rk}^2}$$

Na osnovu formula (3.48) i (3.49) slijedi da je,

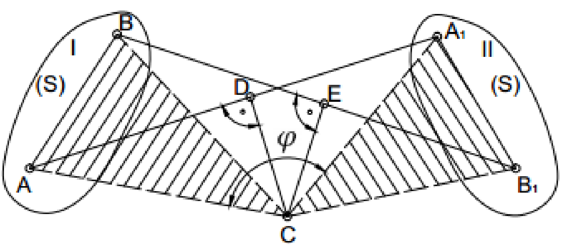
$$\frac{a_A}{\overline{AP_a}} = \frac{a_A}{\overline{AP_a}} = \cdots = \frac{a_M}{\overline{AP_a}} \qquad (3.50)$$

Na bazi ovog može se kazati, intenziteti ubrzanja tačaka ravne figure u svakom trenutku vremena proporcijonalni su rastojanjima tih tačaka od trenutnog pola ubrzanja P_a, a vektori ubrzanja tih tačaka grade sa dužinama koje spajaju te tačke sa trenutnim polom ubrzanja isti ugao $\alpha = arctg\frac{|\varepsilon_{rk}|}{\omega_{rk}^2}$.

3.4.4. Trenutni centar obrtanja ravne figure. Centroide

Ravnu figuru (S) možemo premjestiti iz jednog u bilo koji drugi položaj u svojoj ravni jednim obrtanjem ravne figure oko nepokretne ose upravne na ravan kretanja, koja prolazi kroz tačku C koji se naziva *centar konačnog obrtanja ravne figure* (*sl.55*).

Ova teorema naziva se Bernuli-Šalova teorema i proističe iz činjenice da se za pol ravne figure izabrati bilo koja tačka figure.



sl.55.

Ako posmatramo dva uzastopna položaja ravne figure, koji odgovaraju trenucima t i $t_1=t+\Delta t$, onda se odsječak AB pomjeri u položaj A_1B_1 za vrijeme Δt. Ako se ovo pomjeranje može ostvariti samo jednim obrtanjem, onda tačke A i B opisuju kružne lukove sa jednim centrom, pri čemu su duži $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ sječice tih kružnih lukova. Poznato je da centar kruga leži na normali povučenoj na sredini dužine sječice, tako da se centar C kruga mora nalaziti u presjeka normala povučenih u tačkama D i E, koje su središta $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$.

Tačka C određena na ovaj način je centar konačnog pomjeravanja ravne figure (*S*).

Obrtanjem oko tačke C za ugao φ moguće je ravnu figuru pomjeriti iz položaja I u položaj II.

U graničnom slučaju, kada vrijeme Δt pomjeranja figure teži nuli, položaj centra C rotacije ravne figure jeste tačka nepokretne ravni sa kojom se u datom trenutku vremena poklapa trenutni pol brzina P_v ravne figure.
U toku kretanja ravne figure neprekidno se mijenja položaj trenutnog pola brzina u pokretnoj ravni – u odnosu na ravnu figuru, a neprekidno se mijenja i položaj trenutnog centra obrtanja u nepokretnoj ravi.

Geometrijsko mjesto tačaka trenutnih polova brzina u odnosu na pokretnu ravan naziva se *pokretna centroida* (ruleta).

Geometrijsko mjesto tačaka trenutnih centara obrtanja u odnosu na nepokretnu ravan naziva se *nepokretna centroida* (baza).
Sa uvedenim pojmovima pokretne i nepokretne centroide može se formulisati teorema o kotrljanju bez klizanja pokretne po nepokretnoj centroidi.

Poansoova teorema: Svako kretanje ravne figure može se predstaviti kao kotrljanje bez klizanja pokretne po nepokretnoj centroidi ugaonom brzinom koja u svakom trenutku odgovara ugaonoj brzini ravne figure. Tačka dodira pokretne i nepokretne centroide je trenutni pol brzina.

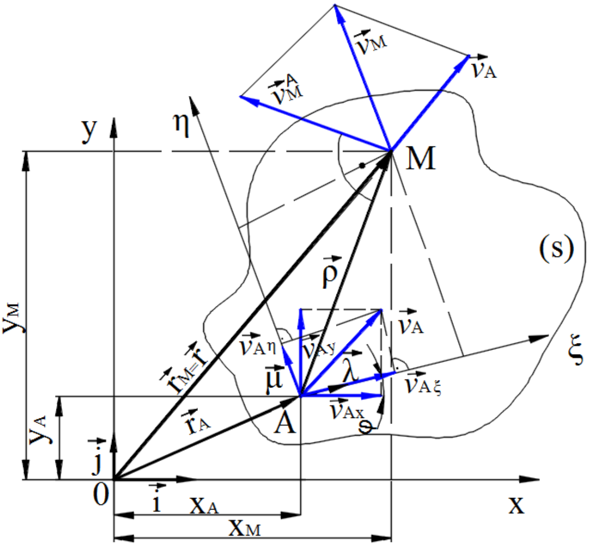
a) Jednačine nepokretne i pokretne centroide

Posmatrajmo proizvoljnu tačku M ravne figure (*S*) koja je u odnosu na nepokretni sistem reference O_{xy} određena vektorom položaja $\vec{r}_M = \vec{r}$, a u odnosu na pokretni sistem reference $A_{\xi\eta}$ vektorom položaja $\vec{\rho} = \overrightarrow{AM}$ (*sl.56*).
Brzina tačke M određena je relacijom,

$$\vec{v}_M = \vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{rk} \times \vec{\rho}.$$

Pošto je $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_A$, to se izraz za brzinu tačke M može napisati u obliku,

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{rk} \times (\vec{r} - \vec{r}_A) \tag{3.51}$$



sl.56.

Da bi smo odredili jednačine nepokretne centoide, jednačinu (3.51) napisaćemo tako što će mo vektorski proizvod napisati u obliku determinante i izdvojiti projekcije na ose nepokretnog koordinatnog sistema O_{xy}, kao

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{rk} \\ x - x_A & y - y_A & 0 \end{vmatrix}$$

odnosno,

$$\vec{v} = v_{Ax}\vec{i} + v_{Ay}\vec{j} - \omega_{rk}(y - y_A)\vec{i} + \omega_{rk}(x - x_A)\vec{j} \tag{3.52}$$

Sada se projekcije vektora brzine na ose nepokretnog koordinatnog sistema mogu napisati u obliku

$$v_x = v_{Ax} - (y - y_A)\omega_{rk} = \frac{dx_A}{dt} - (y - y_A)\omega_{rk}$$

$$v_y = v_{Ay} - (x - x_A)\omega_{rk} = \frac{dy_A}{dt} - (x - x_A)\omega_{rk}.$$

Ako posmatramo tačku P_v, koja je trenutni pol brzina i njina brzina jednaka je nuli, onda se sistem jednačina može napisati u obliku,

$$\frac{dx_A}{dt} - \left(y_p - y_A\right)\omega_{rk} = 0 \qquad (3.53)$$
$$\frac{dy_A}{dt} - (x_p - x_A)\omega_{rk} = 0$$

gdje su x_p i y_p koordinate trenutnog pola brzina P_v.
Ako sistem jednačina (3.53) riješimo po x_p i y_p, dobijamo

$$x_p = x_A - \frac{1}{\omega_{rk}}\frac{dy_A}{dt} \qquad (3.54)$$
$$y_p = y_A - \frac{1}{\omega_{rk}}\frac{dx_A}{dt}$$

Jednačine (3.54), ako su jednoznačne, neprekidne i dva puta diferencijabilne predstavljaju *parametarske jednačine nepokretne centroide*.
Jednačine pokretne centroide odredićemo polazeći od izraza za brzinu tačke *M*, koju možemo napisati u obliku

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{rk} \times \vec{\rho} = \vec{v}_{Ax} + \vec{v}_{Ay} + \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ 0 & 0 & \omega_{rk} \\ \xi & \eta & 0 \end{vmatrix}$$

odnosno,

$$\vec{v} = \vec{v}_{Ax} + \vec{v}_{Ay} - \omega_{rk}\,\eta\vec{\lambda} + \omega_{rk}\,\xi\vec{\mu} \qquad (3.55)$$

Projekcije vektora brzine (3.55), na ose pokretnog sistema $A_{\xi\eta}$ (*sl.56.*), su

$$v_\xi = v_{Ax}\cos\varphi + v_{Ay}\sin\varphi - \omega_{rk}\,\eta \qquad (3.56)$$
$$v_\eta = -v_{Ax}\sin\varphi + v_{Ay}\cos\varphi + \omega_{rk}\,\xi$$

Ako posmatramo kretanje trenutnog pola P_v, čija je brzina jednaka nuli, jednačine (3.56) se mogu napisati u obliku

$$\frac{dx_A}{dt}cos\varphi + \frac{dy_A}{dt}sin\varphi - \omega_{rk}\eta_p = 0 \qquad (3.57)$$
$$-\frac{dx_A}{dt}sin\varphi + \frac{dy_A}{dt}cos\varphi - \omega_{rk}\xi_p = 0$$

Iz jednačina (3.57), nalazimo

$$\xi_p = \frac{1}{\omega_{rk}}\left(\frac{dx_A}{dt}sin\varphi - \frac{dy_A}{dt}cos\varphi\right) \qquad (3.58)$$
$$\eta_p = \frac{1}{\omega_{rk}}\left(\frac{dx_A}{dt}cos\varphi - \frac{dy_A}{dt}sin\varphi\right)$$

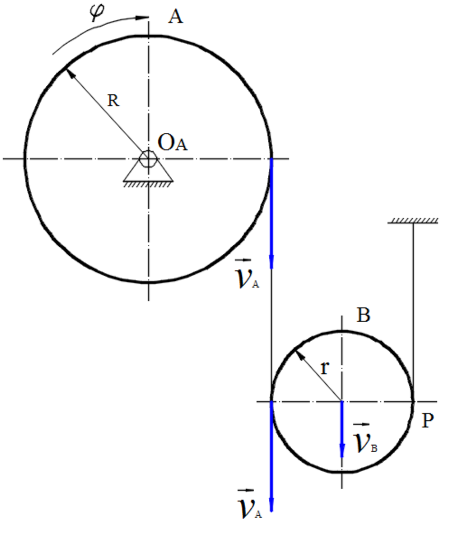
Jednačine (3.58) predstavljaju jednačine pokretne centroide u parametarskom obliku.

Eliminacijom parametra *t*, iz sistema jednačina (3.54) i (3.58), dobićemo jednačine nepokretne i pokretne cntroide. Kada se te centroide odrede, onda se ravno kretanje može proučiti ako se posmatra kotrljanje pokretne po nepokretnoj centroidi.

Zadaci

<u>Zadatak 3.4</u>. Odrediti brzinu centra kružnog diska B koji se spušta usled obrtanja kružnog diska A po zakonu $\varphi = \pi t^2$ $[rad]$, (*sl.3.4*). Poluprečnik diska A je R $[m]$, a diska B (tereta) je $r = R/2[m]$.

<u>Rješenje:</u>



sl. 3.4.

Da bi se odredila brzina centra diska B, neophodno je znati njegovu ugaonu brzinu ω_B .

Linijska brzina v_A se izračunava kao:

$v_A = R \cdot \omega_A = R \cdot \dot{\varphi}$, odnosno

$$v_A = 2R\pi t \ \left[\frac{m}{s}\right].$$

Teret B se spušta i ujedno vrši translaciju i rotaciju, pri čemu se pol brzina nalazi u tački P.

Slijedi da je,

$v_A = 2r \cdot \omega_B$ i $\omega_B = \frac{v_A}{2r} = \frac{2R\pi t}{2\frac{R}{2}}$, odnosno

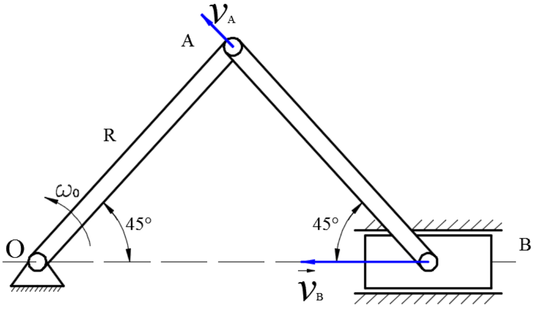
$$\omega_B = 2\pi t \ [s^{-1}].$$

Intenzitet brzine centra tereta je:

$$\boldsymbol{v_B} = r \cdot \omega_B = \boldsymbol{R\pi t} \ \left[\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}\right].$$

<u>Zadatak 3.5.</u> Krivaja $\overline{OA} = R = 1\,m$ se obrće konstantnom ugaonom brzinom $\omega_0 = 2\ \frac{rad}{s}$ oko nepokretne ose koja prolazi kroz tačku O i dovodi u kretanje polugu AB koja je spojena sa klizačem B. Za dati ravanski polužni mehanizam, u položaju kao na slici (*sl.3.5*), odrediti brzinu klizača B.

<u>Rješenje:</u>



sl. 3.5.

Brzina tačke A, poluge *OA*, je

$$v_A = R \cdot \omega_0$$

$$v_A = 2\ \left[\frac{m}{s}\right].$$

<u>**Prvi način:** (određivanje brzine tačke na osnovu teoreme o projekcijama brzina)</u>

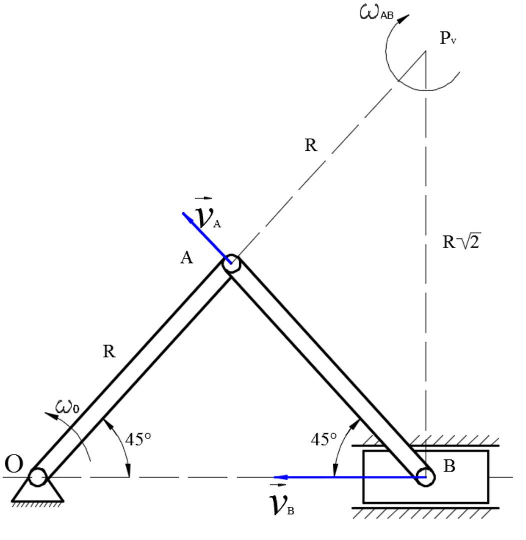
Na osnovu teoreme o projekciji brzina na pravu određujemo brzinu tačke B poluge AB:

$v_A = v_B\ \cdot cos45^0$, odnosno

$v_B\ = \frac{v_A}{cos45^0} = v_A\sqrt{2}$, pa je

$$\boldsymbol{v_B\ = 2\sqrt{2}\ \ \left[\frac{m}{s}\right]}$$

<u>**Drugi način:** (određivanje brzine tačke preko pola brzina ravne figure)</u>



sl.3.5.a

Uzimajući u obzir vektore brzina v_A i $v_{B\ ,}$ određujemo pol brzina koji se nalazi u tački Pv:

Brzinu tačke B određujemo kao:

$$v_B = \overline{BPv} \cdot \omega_{AB}$$

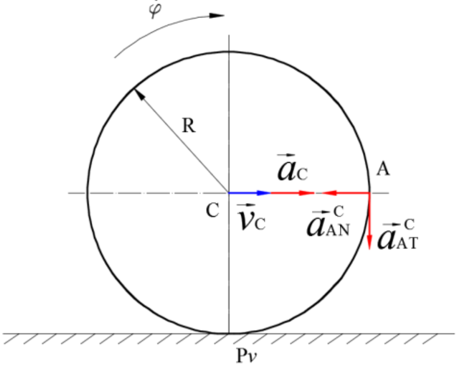
gdje je, $\omega_{AB} = \omega_0$.

Sada je $v_B = R\sqrt{2} \cdot \omega_0$, odnosno

$$\boldsymbol{v_B = 2\sqrt{2}\ \left[\frac{m}{s}\right]}.$$

Zadatak 3.6. Kružni disk se obrće po ravnoj podlozi po zakonu $\varphi = 2t^2\ [rad]$, pri čemu se vrijeme t mjeri u sekundama. Odrediti brzinu i ubrzanje tačke A na obodu diska. Poluprečnik diska $R = 30\ cm$. (*sl.3.6*)

Rješenje:



sl.3.6.

Ubrzanje tačke A je:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_A^C = \vec{a}_C + \vec{a}_{AT}^C + \vec{a}_{AN}^C$$

Brzina tačke C:

$$v_C = \overline{CP_v} \cdot \omega = \overline{CP_v} \cdot \dot{\varphi} = R \cdot 4t$$

$$v_C = \mathbf{1,2}\boldsymbol{t}\ \left[\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}\right].$$

Ubrzanje tačke C:

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = \mathbf{1,2}\ \left[\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s^2}}\right].$$

Slijedi:

$$a_{AN}^{C} = \overline{AC} \cdot \dot{\varphi}^2 = 0{,}3 \cdot 16t^2 = 4{,}8\, t^2 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$a_{AT}^{C} = \overline{AC} \cdot \ddot{\varphi} = 0{,}3 \cdot 4 = 1{,}2 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

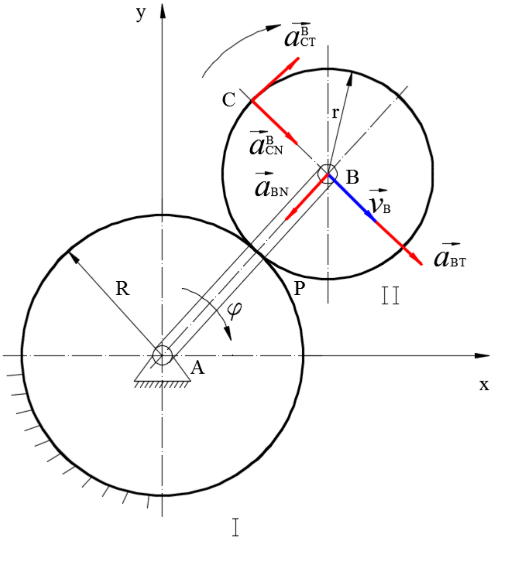
Intenzitet ubrzanja tačke A je:

$a_A = \sqrt{(a_{AN}^{C} - a_C)^2 + {a_{AT}^{C}}^2}$, odnosno

$$\boldsymbol{a_A = 1{,}7\sqrt{4(2t^2 - 1) + 1} \left[\frac{m}{s^2}\right]}.$$

Zadatak 3.7. Poluga AB se obrće oko nepokretne ose Oz po zakonu $\varphi = \frac{1}{3}\pi t^2\ [rad]$. za kraj poluge AB vezan je centar diska II koji se kotrlja bez klizanja po nepokretnom disku I. Poluprečnici diskova su $r\ [m]$ i $R = \frac{2}{3} r\ [m]$. odrediti brzinu i ubrzanje tačke C koja se nalazi na obodu diska II (*sl.3.7*). Vrijeme t se mjeri u sekundama.

Rješenje:



sl.3.7.

Da bi se odredili brzina i ubrzanje tačke C diska II, neophodno je prvo odrediti ugaonu brzinu diska II.

Kako je tačka A trenutni pol brzina poluge AB, brzina tačke B je:

$v_B = (R + r)\dot{\varphi} = \left(\frac{2}{3}r + r\right)\frac{2}{3}\pi t$, odnosno

$$v_B = \frac{10}{9} r\pi t \ \left[\frac{m}{s}\right].$$

Tačka P na mjestu dodira diskova I i II predstavlja trenutni pol brzina diska II, pa se može napisati:

$$v_B = \overline{PB} \cdot \omega_{II} = r \cdot \omega_{II}$$

Slijedi da je ugaona brzina diska II

$$\omega_{II} = \frac{v_B}{\overline{PB}} = \frac{\frac{10}{9} r\pi t}{r} = \frac{10}{9}\pi t \ [s^{-1}],$$

a ugaono ubrzanje $\varepsilon_{II} = \frac{10}{9}\pi [s^{-2}]$

Ubrzanje tačke C je

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_C^B = \vec{a}_{BT} + \vec{a}_{BN} + \vec{a}_{CT}^B + \vec{a}_{CN}^B$$

$$a_{BT} = \overline{AB} \cdot \varepsilon_{AB} = \frac{5}{3} r \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$a_{BT} = \frac{10}{9} r\pi \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

$$a_{BN} = \frac{v_B^2}{\overline{AB}} = \frac{20}{27} r\pi^2 t^2 \ \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Slijedi:

$$a_{CN}^B = \overline{CB} \cdot {\omega_{II}}^2 = r \cdot \frac{100}{81}\pi^2 t^2 = \frac{100}{81} r\pi^2 t^2 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$a_{CT}^B = \overline{CB} \cdot \varepsilon_{II} = \frac{10}{9} r\pi \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

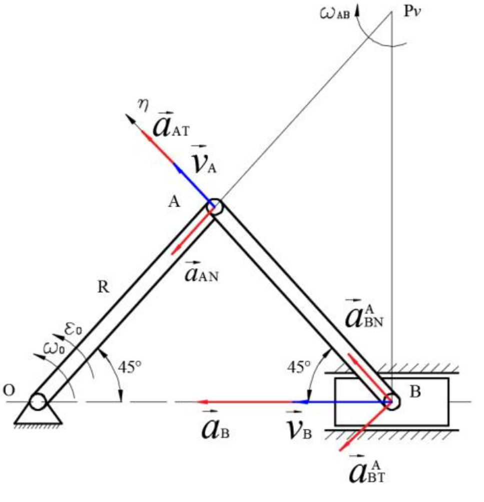
Ukupno ubrzanje tačke C je

$$a_c = \sqrt{(a_{CN}^B + a_{BT})^2 + (a_{CT}^B - a_{BN})^2}$$

$$\boldsymbol{a_c = r\pi\sqrt{2,46 + 1,1\pi t^2 + 2,05\pi^2 t^4}} \left[\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s^2}}\right].$$

Zadatak 3.8. Za mehanizam kao na slici (*sl.3.8*), u datom položaju, naći ubrzanje klizača B i ugaono ubrzanje poluge AB. Ugaona brzina poluge OA je $\omega_0 = 2\pi\ [s^{-1}]$, a ugaono ubrzanje $\varepsilon_0 = 2\omega_0^2\ [s^{-2}]$. Dužina poluge $\overline{OA} = 1\ m$.

Rješenje:



sl.3.8.

Ubrzanje klizača B određeno je vektorom:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_B^A$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{AT} + \vec{a}_{AN} + \vec{a}_{BT}^A + \vec{a}_{BN}^A \qquad (*)$$

Tangentna komponenta ubrzanje tačke A je

$$a_{AT} = R \cdot \varepsilon_0 = 8\pi^2 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

a normalna komponenta ubrzanja je

$$a_{AN} = R \cdot {\omega_0}^2 = 4\pi^2 \ \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Brzina tačke B, na osnovu teoreme o projekciji brzina, iznosi

$$v_B \cdot cos\ 45^0 = v_A,$$

pa je $\qquad v_B = 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{m}{s}\right]$

S druge strane je, $v_B = \overline{BP_v} \cdot \omega_{AB}$,

odakle slijedi da je $\qquad \omega_{AB} = 2\pi = \omega_0.$

Normalna komponenta ubrzanja tačke B oko tačke A je

$$a_{BN}^{A} = \overline{AB} \cdot \omega_{AB}^2 = R \cdot {\omega_0}^2 = 4\pi^2 \ \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Ako jednačinu (∗) pojektujemo na osu štapa AB, dobijamo

$$a_B \cdot cos45^0 = a_{AT} + a_{BN}^{A}$$

Odakle dobijamo da je intenzitet ubrzanja tačke B

$$\boldsymbol{a_B = 12\sqrt{2}\pi^2} \ \left[\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s^2}}\right].$$

Ako jednačinu (∗) pojektujemo normalno na osu štapa dobijamo jednačinu

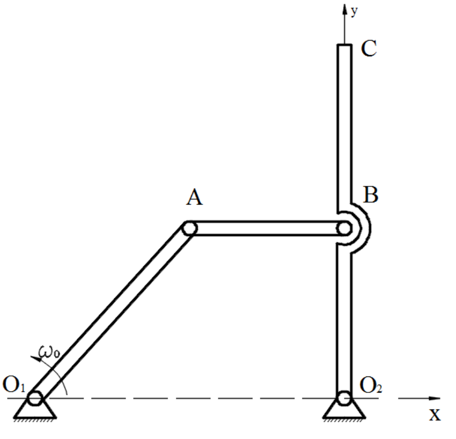
$$a_B \cdot sin45^0 = a_{AN} + a_{BT}^{A}$$

Iz koje je, $a_{BT}^{A} = 12\sqrt{2}\pi^2 \frac{\sqrt{2}}{2} - 4\pi^2 = 8\pi^2.$

Kako je $a_{BT}^{A} = \overline{AB} \cdot \varepsilon_{AB}$, slijedi da je ugaono ubrzanje štapa AB,

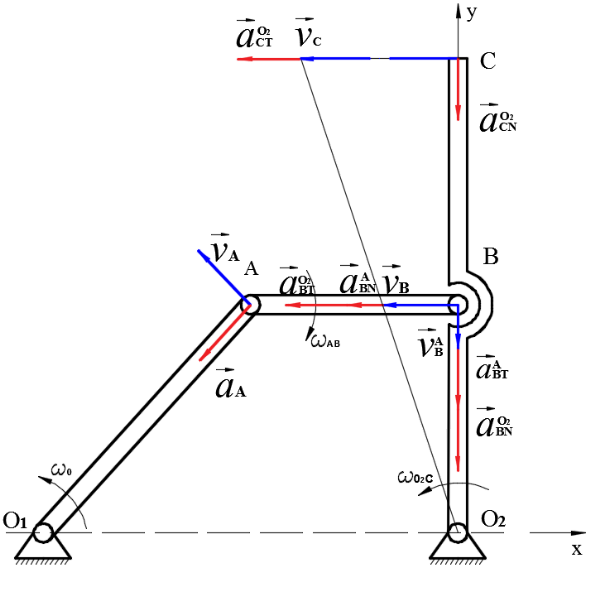
$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BT}^{A}}{\overline{AB}} = \boldsymbol{8\pi^2} \ [\boldsymbol{s^{-2}}].$$

Zadatak 3.9. Za dati mehanizam odrediti brzinu i ubrzanje tačke C u položaju prikazanom na slici (*sl.3.9.*), ako se krivaja O_1A obrće konstantnom ugaonom brzinom ω_0. Dato je: $\overline{O_1A} = R\sqrt{2}, \overline{AB} = \overline{O_2B} = \overline{BC} = R.$



sl.3.9.

Rješenje:



sl.3.9.a

Usvajajući tačku A za pol translacije poluge AB, brzina tačke B se može napisati u obliku:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A \qquad (a)$$

gdje su:

$v_A = \overline{O_1A} \cdot \omega_0 = R\omega_0\sqrt{2}$

$v_B^A = \overline{AB} \cdot \omega_{AB}$

Projektovanjem vektorske jednačine (a) na ose O_x i O_y, dobijamo

$$v_B = v_A \cdot cos45^0 = R\omega_0$$

$$0 = v_A \cdot sin45^0 - v_B^A,$$

iz kojih se može odrediti intenzitet brzine tačke B oko tačke A v_B^A:

$$v_B^A = R\omega_0$$

Sada je ugaona brzina poluge AB,

$$\omega_{AB} = \frac{v_B^A}{\overline{AB}} = \omega_0$$

Napomenimo, da smo ugaonu brzinu poluge mogli odrediti i preko trenutnog pola brzina P_v poluge AB, koja se u ovom slučaju poklapa sa tackom C, kao

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{\overline{AP_v}} = \frac{R\omega_0\sqrt{2}}{R\sqrt{2}} = \omega_0$$

Štap O_2C se obrće oko nepokretne ose koja prolazi kroz tačku O_2 i upravna je na ravan slike. Kako je brzina tačke B štapa:

$$v_B = \overline{O_2B} \cdot \omega_{O_2C} = R\omega_{O_2C},$$

pa je ugaonu brzinu štapa O_2C:

$$\omega_{O_2C} = \frac{v_B}{R} = \omega_0,$$

dok je intenzitet brzine tačke C:

$$v_c = \overline{O_2c} \cdot \omega_{O_2C} = 2R\omega_0$$

Ubrzanje tačke B štapa AB, usvajajući tačku A za pol translacije, dato je relacijom:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A \qquad (b)$$

u kojoj je poznat vektor ubrzanja tačke A, čiji je intenzitet:

$$a_A = a_{AN}^{O_1} = a_{AN} = \overline{AO_1} \cdot {\omega_0}^2 = R{\omega_0}^2\sqrt{2}$$

Normalno obrtno ubrzanje $\vec{a}_{BN}^A$ je intenziteta:

$$a_{BN}^A = \overline{AB} \cdot {\omega_{AB}}^2 = R{\omega_0}^2$$

Kako tačka B istovremeno pripada i štapu O_2B, koji se obrće oko nepokretne ose koja prolazi kroz tačku O_2, njeno ubrzanje se može izraziti kao:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{BN}^{O_2} + \vec{a}_{BT,}^{O_2} \qquad (c)$$

Intenzitet normalne obrtne komponente ubrzanja tačke B:

$$a_{BN}^{O_2} = \overline{BO_2} \cdot {\omega^2}_{O_2C} = R{\omega_0}^2$$

Intenzitet tangentnog obrtnog ubrzanja je:

$$a_{BT}^{O_2} = \overline{BO_2} \cdot \varepsilon_{O_2C} = R \cdot \varepsilon_{O_2C}$$

Iz jednačina (b) i (c) dobija se relacija:

$$\vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A = \vec{a}_{BN}^{O_2} + \vec{a}_{BT,}^{O_2} \qquad (d)$$

Projekcijom jednačine (d) na ose *x i y* dobijaju se dvije skalarne jednačine:

$$-a_A sin45^0 - a_{BN}^A = -a_{BT}^{O_2}$$

$$-a_A cos45^0 - a_{BT}^A = -a_{BN}^{O_2},$$

odakle se izračunavaju intenziteti nepoznatih komponenti:

$$a_{BT}^{O_2} = 2R{\omega_0}^2$$

$$a_{BT}^A = 0$$

i nepoznata ugaona ubrzanja:

$$\varepsilon_{O_2C} = 2{\omega_0}^2$$

$$\varepsilon_{AB} = 0$$

Ubrzanje tačke C štapa O_2C je određeno je izrazom:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{CN}^{O_2} + \vec{a}_{CT}^{O_2} \qquad (e)$$

gdje su:

$$a_{CN}^{O_2} = \overline{O_2C} \cdot \omega^2{}_{O_2C} = 2R{\omega_0}^2$$

$$a_{CT}^{O_2} = \overline{O_2C} \cdot \varepsilon_{O_2C} = 4R{\omega_0}^2$$

Projektovanjem jednačine (e) na ose datog Dekartovog koordinatnog sistema dobijaju se projekcije vektora ubrzanja tačke C kao

$$a_{Cx} = -a_{CT}^{O_2} = -4R{\omega_0}^2$$

$$a_{Cy} = -a_{CN}^{O_2} = -2R{\omega_0}^2,$$

pa je intenzitet ubrzanja tačke C:

$$a_C = \sqrt{a^2{}_{Cx} + a^2{}_{Cy}} = \mathbf{2\sqrt{5}R{\omega_0}^2}.$$

3.5. OBRTANJE KRUTOG TIJELA OKO NEPOKRETNE TAČKE

Kretanje krutog tijela, pri kome neka tačka tijela pri kretanju ostaje nepokretna, naziva se *obrtanje krutog tijela oko nepokretne tačke ili sferno kretanje krutog tijela*. Nepokretna tačka može biti na tijelu ili da se nalazi van njega, samo tada mora biti na bilo koji način čvrsto vezana za tijelo.

3.5.1. Jednačine kretanja krutog tijela koje se obrće oko nepokretne tačke

Položaj tijela pri obrtanju oko nepokretne tačke jednoznačno je određen položajem pokretnog sistema referecije $O_{\xi\eta\zeta}$ -koordinatni sistem koji je čvrsto vezan za tijelo, u odnosu na nepokretni sistem referencije O_{xyz}, pri čemu je nepokretna tačka O ishodište ovih koordinatnih sistema.

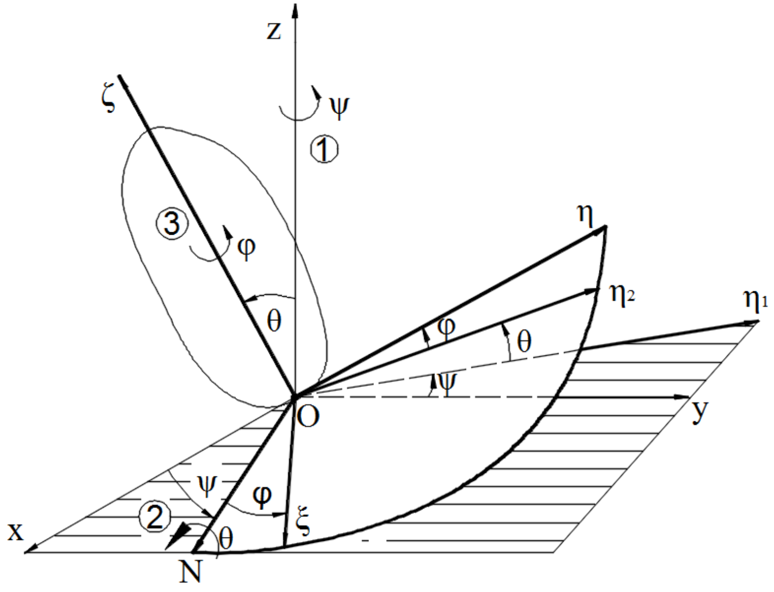
Jedan od postupaka kojim se definiše položaj pokretnog sistema referencije u odnosu na nepokretni sistem referencije je *Ojlerov postupak*. Ojler je pokazao da se položaj tijela pri obrtanju oko nepokretne tačke jednoznačno može odrediti preko tri ugla, koji se po njemu nazivaju *Ojlerovi uglovi*, tako što se izvrše tri nezavisna obrtanja na sledeći način (*sl.57.*):

1) Prvo se izvrši obrtanje pokretnog koordinatnog sistema $O_{\xi\eta\zeta}$ oko vertikalne ose O_z za ugao $\psi - ugao\ precesije$. Pokretni koordinatni sistem prelazi u položaj $O_{N\eta_1 z}$. Linija presjeka *ON* nepokretne ravni O_{xyz} sa pokretnom ravni $O_{\xi\eta}$ naziva se čvorna osa.

2) Druga rotacija sistema reference $O_{N\eta_1 z}$ izvrši se oko čvorne ose O_N za ugao θ – *ugao nutacije*, koji prelazi u sistem reference $O_{N\eta_2\zeta}$.

3) Treća rotacija pokretnog sistema reference $O_{N\eta_2\zeta}$ izvrši se oko ose O_ζ za ugao φ – *ugao sopstvene rotacije* i time se dobija konačni položaj pokretnog sistema reference $O_{\xi\eta\zeta}$.

Sa ova tri obrtanja, može se pokretni sistem referencije $O_{\xi\eta\zeta}$, koji je čvrsto vezan za pokretno tijelo, prevesti u bilo koji položaj u odnosu na nepokretni sistem referencije O_{xyz}. Smatramo da su Ojlerovi uglovi pozitivni ako se uočena obrtanja posmatrana sa pozitivnih krajeva osa O_z, O_N i O_ζ vide kao matematički pozitivna.



sl.57.

Neka se u početnom trenutku vremena pokretni sistem referencije $O_{\xi\eta\zeta}$ poklapa sa nepokretnim sistemom referencije O_{xyz}. Položaj tijela, odnosno položaj pokretnog sistema reference u odnosu na nepokretni sistem reference možemo odrediti preko navedena tri uzastopna nezavisna obrtanja (rotacije) tijela (*sl.57.*).

Pri obrtanju krutog tijela oko nepokretne tačke uglovi ψ, θ i φ, mijenjaju se tokom vremena i oni su funkcije vremena t, pa možemo napisati

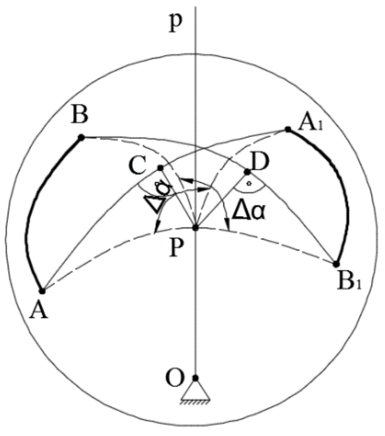
$$\Psi = f_1(t) \qquad \theta = f_2(t) \qquad \varphi = f_3(t) \tag{3.59}$$

Ove jednačine u potpunosti određuju kretanje tijela oko nepokretne tačke i nazivaju se *konačne jednačine obrtanja krutog tijela oko nepokretne tačke ili konačne jednačine sfernog kretanja krutog tijela*. Sobzirom na

prirodu kretanja, ove jednačine treba da su neprekidne funkcije vremena, jednoznačne i dva puta diferencijabilne.
Treba napomenut da se položaj krutog tijela pri obrtanju oko nepokretne ose može odrediti uvođenjem i drugih uglova, ne samo Ojlerovih. Međutim za sve postupke osnovno je da se definišu pomoću tri nezavisna obrtanja tijela oko odgovarajućih osa.

3.5.2. Ojler-Dalamberova teorema

Svako pomjerenje krutog tijela, koje ima jednu nepokretnu tačku O iz jednog položaja u drugi položaj, može se izvršiti jednim obrtanjem tog tijela, za ugao $\Delta\alpha$, oko ose konačne rotacije koja prolazi kroz nepokretnu tačku O (*sl.58.*).
Neka je u trenutku t položaj tijela određen položajem tačaka A i B na sferi, a u trenutku $t_1=t+\Delta t$ položaj tijela određen je položajem tačaka A_1 i B_1. Jednim obrtanjem tijela oko neke ose koja prolazi kroz tačku O moguće je tačke A i B na sferi prevesti u položaj A_1 i B_1 na toj sferi. Spojimo tačke A sa A_1 i B sa B_1 lucima velikih krugova i iz sredine lukova $\widehat{AA_1}$ i $\widehat{BB}_1$ povucimo sferne normale. Te normale su takođe lukovi velikih krugova a te sferne normale će se sjeći u tački P na površini sfere.



sl.58.

Sferni trouglovi ΔABP i ΔA_1B_1P su podudarni, jer su im sferne stranice jednake. Na taj način pomjeranje tijela može se izvršiti jednim obrtanjem tijela oko ose O_P i ta osa se naziva <u>osa konačnog obrtanja</u>, a ugao $\Delta\alpha$ naziva se <u>ugao konačnog obrtanja.</u>

Ojler-Dalamberova teorema predstavlja geometrijsku interpretaciju obrtanja krutog tijela oko nepokretne tačke, obrtanje tijela za ugao $\Delta\alpha$ oko nepokretne tačke P nije stvarno kretanje tijela, već samo početni i krajnji položaj odgovaraju stvarnom kretanju.

Položaj ose OP zavisi od početnog i krajnjeg položaja tijela. Kada se pređe na granični slučaj, kada $\Delta t \rightarrow 0$ lukovi $\widehat{AB}$ i $\widehat{A_1B_1}$ su veoma bliski jedan drugom i tada osa konačnog obrtanja mijenja svoj položaj težeći graničnom položaju i naziva se trenutna osa obrtanja za dati trenutak vremena *t*. Trenutna osa obrtanja predstavlja geometrijsko mjesto tačaka tijela koje se obrće oko nepokretne tačke čije su brzine u datom trenutku vremena jednake nuli.

Sve tačke tijela na trenutnoj obrtnoj osi miruju, a ostale tačke tijela opisuju elementarne dijelove kružnih lukova u ravnima normalnim na osu čiji je centar na trenutnoj osi.

3.5.3. Trenutna ugaona brzina i trenutno ugaono ubrzanje tijela koje se obrće oko nepokretne tačke

Srednja ugaona brzina tijela može se izraziti kao količnik ugla Δα za koji se tijelo obrne oko trenutne obrtne ose *OP* i odgovarajućeg intervala vremena,

$$\omega_{sr} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \tag{3.60}$$

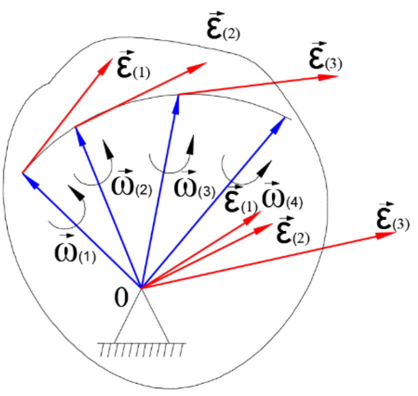
a intenzitet vektore trenutne ugaone brzine ω jedank je graničnoj vrijednosti kojoj teži srednja ugaona brzina kada pustimo da interval vremena teži nuli:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \tag{3.61}$$

Vektor $\vec{\omega}$ trenutne ugaone brzine usmjeren je duž trenutne obrtne ose OP. Međutim ugaona brzina ω ne može se odrediti izvodom nekog ugla po vremenu, tj.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \neq \frac{d\alpha}{dt}$$

jer pri obrtanju krutog tijela oko nepokretne tačke ne postoji takav ugao, već se položaj tijela određuje sa tri nezavisna obrtanja.



sl.59.

Trenutna obrtna osa, tokom kretanja tijela, mijenja svoj položaj, ali stalno prolazi kroz nepokretnu tačku *O*.

Vektor $\vec{\omega}$ trenutne ugaone brzine mijenja se tokom vremena po intezitetu i po pravcu, tako da se i vektor $\vec{\varepsilon}$ trenutnog ugaonog ubrzanja, određen prvim izvodom po vremenu vektora trenutne ugaone brzine, takođe mijenja tokom

vremena po intezitetu i pravcu i ne poklapa se sa pravcem trenutne ugaone brzine (*sl.59.*), gdje su sa indeksima u zagradi označene ove vektorske funkcije u različitim trenucima vremena.
Ako duž trenutne ose obrtanja *OP* uvedemo jedinični vektor $\vec{\omega}_0$ onda se vektor ugaone brzine $\vec{\omega}$ može napisati kao:

$$\vec{\omega} = \omega\vec{\omega}_0 \tag{3.62}$$

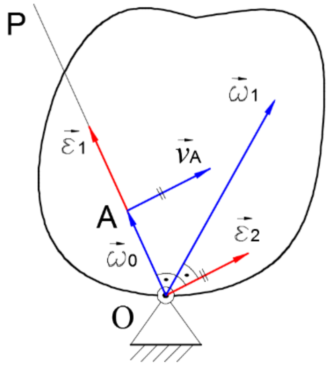
Sada je vektor ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ određen sa,

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega\vec{\omega}_0) = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}_0 + \omega\frac{d\vec{\omega}_0}{dt} = \vec{\varepsilon_1} + \vec{\varepsilon_2} \tag{3.63}$$

Komponenta trenutnog ugaonog ubrzanja, koja je jednaka

$$\vec{\varepsilon_1} = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}_0 = \dot{\omega}\vec{\omega}_0 \tag{3.63.a}$$

karaktretiše promjenu inteziteta vektora trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ i ima pravac trenutne obrtne ose, a početak vektora nalazi se u nepokretnoj tački *O* (*sl.59.a*).



sl.59.a

Pri analizi komponente $\vec{\varepsilon_2}$ treba zapaziti da je vektor $\vec{\omega}_0$ konstantnog intenziteta i da je kraj ovog vektora, tačka A, na trenutnoj osi obratnja *OP*. Njegov izvod po vremenu predstavlja brzinu $\vec{u}_A$, tačke A koja je određena sa,

$$\vec{u}_A = \frac{d\vec{\omega}_0}{dt} = \dot{\vec{\omega}}_0$$

Komponenta trenutnog ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon_2}$, koristeći se izrazom (3.63), jednaka je

$$\vec{\varepsilon_2} = \omega\frac{d\vec{\omega}_0}{dt} = \omega(\vec{\omega}_1 x\vec{\omega}_0) = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega} = \omega\,\vec{u}_A \tag{3.63.b}$$

i karakteriše promjenu pravca vektora trenutne ugaone brzine obrtanja vektora ω. Pravac vektora $\vec{\varepsilon_2}$ upravan je na ravan vektora $\vec{\omega}_1 \; i \; \vec{\omega}_0$, gdje je $\vec{\omega}_1$ označena ugaona brzina obrtanja vektora $\vec{\omega}$. Početak vektora $\vec{\varepsilon_2}$ nalazi se takođe u nepokretnoj tački O.
Treba napomenuti da je, trenutna ugaona brzina $\vec{\omega}$, zajednička kinematička karakteristika za sve tačke tijela koje se obrće oko nepokretne tačke.

3.5.4. Ojlerove kinematičke jednačine

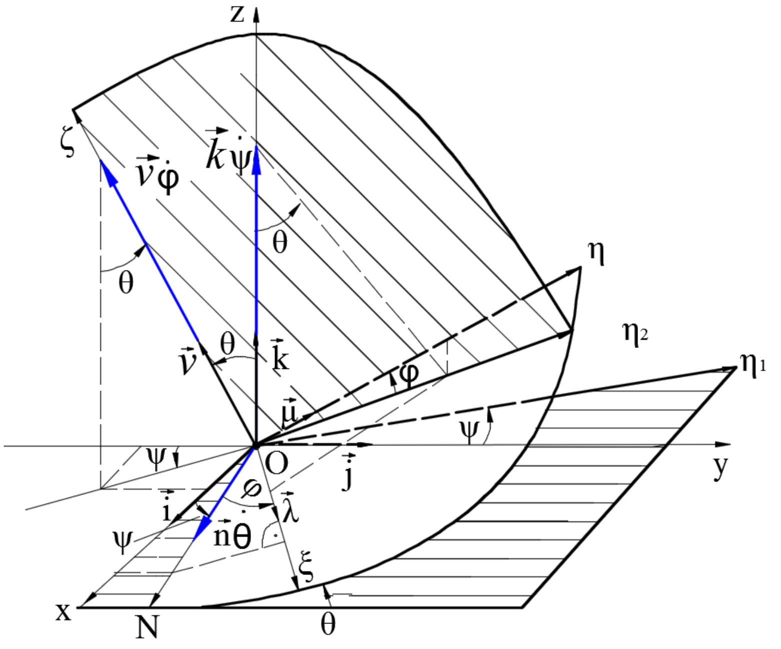
Sobzirom da se obrtanje tijela oko nepokretne tačke sastoji iz tri nezavisna obrtanja, može se trenutna ugaona brzina odrediti polazeći od konačnih jednačina kretanja krutog tijela oko nepokretne tačke, tj. iz Ojlerovih uglova.

Srednje ugaone brzine oko odgovarajućih osa određene su sa $\frac{\Delta\psi}{\Delta t}, \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \; i \; \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, a granične vrijednosti predstavljaju komponente vektora trenutne ugaone brzine, gdje je

$$\dot{\psi} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta t} = \frac{d\psi}{dt} \qquad - ugaona\ brzina\ precesije$$
$$\dot{\theta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad - ugaona\ brzina\ nutacije$$
$$\dot{\varphi} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad - ugaona\ brzina\ sopstvene\ rotacije$$

Vektori ugaonih brzina precesije $\dot{\psi}\vec{k}$, nutacije $\dot{\theta}\vec{n}$ i sopstvene rotacije $\dot{\varphi}\vec{v}$ usmjereni su duž odgovarajući osa rotacije O_z, O_N i O_ζ, čiji su jedinični vektori $\vec{k}, \vec{n}$ i $\vec{v}$, respektivno (*sl.60*). Tako da je vektor trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ tijela, koje se obrće oko nepokretne tačke, jednak vektorskim zbirom komponentnih ugaonih brzina precesije, nutacije i ugaone brzine sopstvene rotacije. Odnosno vektor trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$, tijela koji vrši sferno kretanje, može se napisati u obliku

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{n} + \dot{\varphi}\vec{v}\ . \tag{3.64}$$



sl.60.

Da bi smo odredili projekcije vektora trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ na ose pokretnog Dekartovog sistema referencije $O_{\xi\eta\zeta}$, napišimo

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \left(\dot{\psi}\vec{k}\right)_\xi + \left(\dot{\theta}\vec{n}\right)_\xi + (\dot{\varphi}\vec{v})_\xi \\ \omega_\eta &= \left(\dot{\psi}\vec{k}\right)_\eta + \left(\dot{\theta}\vec{n}\right)_\eta + (\dot{\varphi}\vec{v})_\eta \\ \omega_\zeta &= \left(\dot{\psi}\vec{k}\right)_\zeta + \left(\dot{\theta}\vec{n}\right)_\zeta + (\dot{\varphi}\vec{v})_\zeta \end{aligned} \tag{3.65}$$

Projekcije vektora ugaone brzina precesije $\dot{\psi}\vec{k}$, na ose pokretnog koordinatnog sistema su,

$$\begin{aligned} \left(\dot{\psi}\vec{k}\right)_\xi &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ \left(\dot{\psi}\vec{k}\right)_\eta &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ \left(\dot{\psi}\vec{k}\right)_\zeta &= \dot{\psi}\cos\theta \end{aligned} \tag{3.66}$$

Projekcije vektora ugaone brzina nutacije $\dot{\theta}\vec{n}$, na ose pokretnog koordinatnog sistema su,

$$\left(\dot{\theta}\vec{n}\right)_{\xi} = \dot{\theta}\cos\varphi\,;\ \left(\dot{\theta}\vec{n}\right)_{\eta} = -\dot{\theta}\sin\varphi\,;\ \left(\dot{\theta}\vec{n}\right)_{\zeta} = 0 \qquad (3.67)$$

Projekcije vektora ugaone brzina sopstvene rotacije $\dot{\varphi}\vec{v}$, na ose pokretnog koordinatnog sistema su,

$$(\dot{\varphi}\vec{\gamma})_{\xi} = 0;\ (\dot{\varphi}\vec{\gamma})_{\eta} = 0;\ (\dot{\varphi}\vec{v})_{\zeta} = \dot{\varphi} \qquad (3.68)$$

Sada su projekcije vektora trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ na ose pokretnog koordinatnog sistema $O_{\xi\eta\zeta}$ (*sl.60*), jednake

$$\begin{aligned} \omega_{\xi} &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \omega_{\eta} &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \omega_{\zeta} &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \qquad (3.69)$$

Intezitet vektora trenutne ugaone brzine određen je sa:

$$\omega = \sqrt{\omega_{\xi}^2 + \omega_{\eta}^2 + \omega_{\zeta}^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta} \qquad (3.70)$$

Projekcije vektora trenutne ugaone brzine, na ose nepokretnog Dekartovog sistema O_{xyz}, odredićemo izrazima

$$\begin{aligned} \omega_x &= \left(\dot{\psi}\vec{k}\right)_x + \left(\dot{\theta}\vec{n}\right)_x + (\dot{\varphi}\vec{v})_x \\ \omega_y &= \left(\dot{\psi}\vec{k}\right)_y + \left(\dot{\theta}\vec{n}\right)_y + (\dot{\varphi}\vec{v})_y \\ \omega_z &= \left(\dot{\psi}\vec{k}\right)_z + \left(\dot{\theta}\vec{n}\right)_z + (\dot{\varphi}\vec{v})_z \end{aligned} \qquad (3.71)$$

Nakon projekcije ugaonih brzina $\dot{\psi}\overrightarrow{k,}$ $,\dot{\theta}\vec{n}\ i\ \dot{\varphi}\vec{v}$ na ose nepokretnog koordinatnog sistema, komponente vektora trenutne ugaone brzine na ose pokretnog koordinatnog sistema O_{xyz}, slika (*sl.59*), su

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_y &= -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\dot{\theta} \end{aligned} \qquad (3.72)$$

Intezitet vektora trenutne ugaone brzine određen je sa,

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\dot\psi^2 + \dot\theta^2 + \dot\varphi^2 + 2\dot\psi\dot\varphi\cos\theta} \tag{3.73}$$

Ako su Ojlerovi uglovi poznate funkcije vremena, onda je moguće odrediti u svakom trenutku vremena vektor trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$, a time i položaj trenutne obrtne ose *OP*, jer jer vektor $\vec{\omega}$ usmjeren duž te ose.

a) Projekcije vektora trenutnog ugaonog ubrzanja na ose pokretnog i nepokretnog Dekartovog koordinatnog sistema

Projekcije vektora $\vec{\varepsilon}$ na ose pokretnog koordinatnog sistema $O_{\xi\eta\zeta}$, koji je čvrsto vezan za tijelo, određuju se relacijama:

$$\varepsilon_\xi = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_\xi ;\ \varepsilon_\eta = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_\eta ;\ \varepsilon_\zeta = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_\zeta . \tag{3.74}$$

S obzirom da se pokretni sistem referencije obrće zajedno sa tijelom, jedinični vektori $\vec{\lambda}, \vec{\mu}\ i\ \vec{\nu}$ pokretnih osa su promjenljivog pravca.

Prema Ojlerovoj formuli, za određivanje vektora brzine, možemo napisati da je

$$\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\lambda};\quad \frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\mu};\quad \frac{d\vec{\nu}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\nu}.$$

Na osnovu ovoga slijedi,

$$\varepsilon_\xi = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_\xi = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\cdot\vec{\lambda} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\cdot\vec{\lambda}\right) - \vec{\omega}\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \frac{d\omega_\xi}{dt} - \vec{\omega}\cdot\left(\vec{\omega}\times\vec{\lambda}\right) = \frac{d\omega_\xi}{dt},$$

jer je $\vec{\omega}\cdot\left(\vec{\omega}\times\vec{\lambda}\right) = 0$, pošto je vektor $\vec{\omega}\times\vec{\lambda}$ upravan na vektor $\vec{\omega}$. Analognim postupkom dokazuje se tačnost preostale dvije relacije sistema jednačina (3.74).

Polazeći od projekcija trenutne ugaone brzine na pokretne ose (3.69), primjenom formule (3.74), dobija se:

$$\varepsilon_\xi = \ddot{\psi}\ sin\ \theta\ sin\ \varphi + \dot{\psi}\ \dot{\theta}\ cos\ \theta\ sin\ \varphi + \dot{\psi}\ \dot{\varphi}\ sin\ \theta\ cos\ \varphi + \ddot{\theta}\ cos\ \varphi - \dot{\theta}\ \dot{\varphi}\ sin\ \varphi$$

$$\varepsilon_\eta = \ddot{\psi}\, sin\,\theta\, cos\,\varphi + \dot{\psi}\,\dot{\theta}\, cos\,\theta\, cos\,\varphi - \dot{\psi}\,\dot{\varphi}\, sin\,\theta\, sin\,\varphi - \ddot{\theta}\, sin\,\varphi - \dot{\theta}\,\dot{\varphi}\, cos\,\varphi \quad (3.75)$$

$$\varepsilon_\zeta = \ddot{\psi}\, cos\,\theta - \dot{\psi}\,\dot{\theta}\, sin\,\theta + \ddot{\varphi}\,.$$

Sada se intenzitet vektora ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ određuje obrascem,

$$\varepsilon = \sqrt{{\varepsilon_\xi}^2 + {\varepsilon_\eta}^2 + {\varepsilon_\zeta}^2}, \quad (3.76)$$

a pravac vektora $\vec{\varepsilon}$, u odnosu na pokretni koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$, određuje se formulama:

$$cos\sphericalangle(\vec{\varepsilon},\vec{\lambda}) = \frac{\varepsilon_\xi}{\varepsilon}; \quad cos\sphericalangle(\vec{\varepsilon},\vec{\mu}) = \frac{\varepsilon_\eta}{\varepsilon}; \quad cos\sphericalangle(\vec{\varepsilon},\vec{\nu}) = \frac{\varepsilon_\zeta}{\varepsilon}. \quad (3.77)$$

Projekcije vektora trenutnog ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ na ose nepokretnog sistema referencije O_{xyz} jednake su izvodima po vremenu odgovarajućih projekcija vektora trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ na iste te ose, tj.

$$\varepsilon_x = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_x = \frac{d\omega_x}{dt};\ \varepsilon_y = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_y = \frac{d\omega_y}{dt};\ \varepsilon_z = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_z = \frac{d\omega_z}{dt}, \quad (3.78)$$

pri čemu su $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ jedinični vektori nepokretnih osa O_{xyz}, konstantni. Koristeći sistem jednačina (3.72) primjenom formula (3.78) dobićemo sljedeće vrijednosti za projekcije vektora $\vec{\varepsilon}$ na ose nepokretnog sistema referencije:

$$\varepsilon_x = \ddot{\varphi}\, sin\,\theta\, sin\,\psi + \dot{\varphi}\,\dot{\theta}\, cos\,\theta\, sin\,\psi + \dot{\varphi}\,\dot{\psi}\, sin\,\theta\, cos\,\psi + \ddot{\theta}\, cos\,\psi - \dot{\theta}\,\dot{\psi}\, sin\,\psi$$

$$\varepsilon_y = -\ddot{\varphi}\, sin\,\theta\, cos\,\psi + \dot{\varphi}\,\dot{\theta}\, cos\,\theta\, cos\,\psi + \dot{\varphi}\,\dot{\psi}\, sin\,\theta\, sin\,\psi + \ddot{\theta}\, sin\,\psi + \dot{\theta}\,\dot{\psi}\, cos\,\psi \quad (3.79)$$

$$\varepsilon_z = \ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\, cos\,\theta - \dot{\varphi}\,\dot{\theta}\, sin\,\theta\,,$$

Sada je intenzitet vektora $\vec{\varepsilon}$, moguće odrediti formulom:

$$\varepsilon = \sqrt{{\varepsilon_x}^2 + {\varepsilon_y}^2 + {\varepsilon_z}^2}. \quad (3.80)$$

Pravac vektora $\vec{\varepsilon}$ u odnosu na nepokretni sistem reference O_{xyz} određuje se formulama:

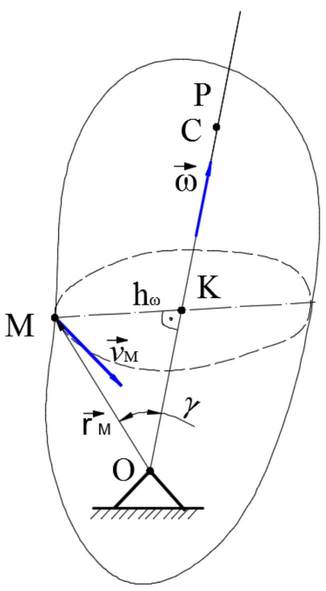
$$cos\sphericalangle(\vec{\varepsilon},\vec{\lambda}) = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon};\quad cos\sphericalangle(\vec{\varepsilon},\vec{\mu}) = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon};\quad cos\sphericalangle(\vec{\varepsilon},\vec{\nu}) = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}. \qquad (3.81)$$

3.5.5. Brzine tačaka tijela koje se obrće oko nepokretne tačke

Brzina proizvoljne tačke M krutog tijela, koje se obrće oko nepokretne tačke, određena je, primjenom Ojlerovog obrasca, sa

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}_M \qquad (3.82)$$

gdje je $\vec{r}_M$ vektor položaja tačke M mjeren od nepokretne tačke O.



sl.61.

Kako je ugaona brzina $\vec{\omega}$ određena za taj trenutak vremena, tako je i brzina tačke M definisana samo za dati trenutak vremena. Može se reći, u proizvoljnom trenutku vremena *t*, trenutni raspored brzina tačaka tijela koje se obrće oko nepokretne tačke jeste takav kao kod tačaka tijela koje se obrće oko nepokretne ose koja prolazi kroz nepokretnu tačku O, u ovom slučaju oko trenutne obrtne ose rotaije *OP* (*sl.61*).

Intezitet vektora brzine tačke *M* je:

$$|\vec{v}_M| = |\vec{\omega} \times \vec{r}_M| = \omega r_M \sin\sphericalangle(\vec{\omega},\vec{r}_M) = \omega h_\omega \qquad (3.83)$$

gdje je h_ω normalno (najkraće) rastojanje tačke *M* od trenutne obrtne ose *OP*.

Vektor brzine tačke M, u odnosu na nepokretni odnosno poretni koordinatni sistem, možemo napisati u obliku

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} x \vec{r}_M = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{v} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \tag{3.84}$$

Na osnovu ove jednačine, slijedi da su projekcije vektora brzine tačke M na ose pokretnog koordinatnog sistema $O_{\xi\eta\zeta}$,

$$\begin{aligned} v_\xi &= \vec{v}\vec{\lambda} = \omega_\eta\, \zeta - \omega_\zeta \eta \\ v_\eta &= \vec{v}\vec{\mu} = \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta \\ v_\zeta &= \vec{v}\vec{v} = \omega_\xi\, \eta - \omega_\eta \xi \end{aligned} \tag{3.85}$$

gdje su $\vec{\lambda}, \vec{\mu}\ i\ \vec{v}$ jedinični vektori pokretnog koordinatnog sistema $O_{\xi\eta\zeta}$.

Projekcije vektora brzine na ose pokretnog koordinatnog sistema O_{xyz}, su

$$\begin{aligned} v_x &= \vec{v}\,\vec{i} = \omega_y\, z - \omega_z y \\ v_y &= \vec{v}\,\vec{j} = \omega_z x - \omega_x z \\ v_\zeta &= \vec{v}\,\vec{k} = \omega_x y - \omega_y x \end{aligned} \tag{3.86}$$

gje su $\vec{i}, \vec{j}\ i\ \vec{k}$ jedinični vektori nepokretnog koorinatnog sistema O_{xyz}.

Intenzitet vektora brzine tačke *M* određuje se formulom

$$v = \sqrt{v_\xi^2 + v_\eta^2 + v_\zeta^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{3.87}$$

a) ***Određivanje položaja trenutne obrtne ose***

Trenutna obrtna osa *OP* tokom vremena mijenja svoj položaj u prostoru prolazeći stalno kroz nepokretnu tačku *O*. Budući da je svaka prava određena položajem dvije tačke, druga tačka trenutne obrtne ose može se odrediti iz svojstva da sve tačke koje leže na trenutnoj obrtnoj osi imaju brzinu jednaku nuli, tj.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.88)$$

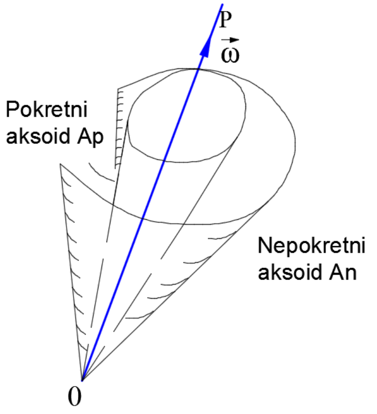
Ova jednačina biće zadovoljena ukoliko su projekcije brzina na ose pokretnog i ose nepokretnog koordinatog sistema jednake nuli, a iz ovog uslova slijede jednačine trenutne obrtne ose u odnosu na pokretni sistem referencije $O_{\xi\eta\zeta}$ su,

$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta} \qquad (3.89)$$

i u odnosu na nepokretni sistem referencije *Oxyz* su,

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \qquad (3.90)$$

b) Aksiodi. Jednačine pokretnog i nepokretnog aksioda



sl.62.

Geometrijsko mjesto položaja trenutnih obrtnih osa *OP* u odnosu na pokretni sistem referencije $O_{\xi\eta\zeta}$, koji je čvrsto vezan za tijelo, predstavlja konusnu površinu sa tjemenom u nepokretnoj tački *O* i naziva se *pokretni aksoid*, a geometrijsko mjesto položaja trenutnih obrtnih osa *OP* u odnosu na nepokretni sistem referencije *Oxyz*, predstavlja takođe konusnu površinu sa vrhom u nepokretnoj tački *O* i naziva se *nepokretni aksoid (sl.62).*

Poanso je formulisao sledeću teoremu: *obrtanje krutog tijela oko nepokretne tačke može se geometrijski interpretirati kao kotrljanje bez klizanja pokretnog aksoida koji je čvrsto vezan za pokretno tijelo po nepokretnom aksoidu tako da se u svakom trenutku vremena ostvari ugaona brzina kotrljanja koja određuje ugaonu brzinu stvarnog kretanja tijela.*

Iz jednačina tenutne ose obrtanja. u odnosu na pokretni i nepokretni sistem referencije, eliminacijom vremena *t* dobijamo jednačine,

$$\frac{\xi}{\eta}=\frac{\omega_\xi(t)}{\omega_\eta(t)}=\emptyset_1(t)$$
$$\frac{\zeta}{\eta}=\frac{\omega_\zeta(t)}{\omega_\eta(t)}=\emptyset_2(t) \qquad (3.91)$$

Ako se iz ovih jednačina može eliminisati parametar *t*, dobija se *jednačina pokretnog aksoida,* kao

$$\emptyset\left(\frac{\xi}{\eta},\frac{\zeta}{\eta}\right)=0 \qquad (3.92)$$

Odnosno, u odnosu na nepokretni sistem referencije, proizilaze jednačine

$$\frac{x}{y}=\frac{\omega_x(t)}{\omega_y(t)}=f_1(t)$$
$$\frac{z}{y}=\frac{\omega_z(t)}{\omega_y(t)}=f_2(t) \qquad (3.93)$$

Ako se iz ovih jednačina može eliminisati parametar *t*, dobija se *jednačina nepokretnog aksoida,* kao

$$f\left(\frac{x}{y},\frac{z}{y}\right)=0 \qquad (3.94)$$

3.5.6. Ubrzanje tačaka krutog tijela koje se obrće oko nepokretne tačke

Vektor ubrzanja proizvoljne tačke *M* krutog tijela koje se obrće oko nepokretne tačke određen je kao prvi izvod po vremenu vektora brzine tačke, pa možemo pisati,

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}x\vec{r})=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$, odnosno

$$\vec{a}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \qquad (3.95)$$

Iz jednačine (3.95) je očigledno da je vektor ubrzanja proizvoljne tačke određen vektorskim zbirom dvije komponenate ubrzanja (*sl.63*), pa je

$$\vec{a} = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega \tag{3.96}$$

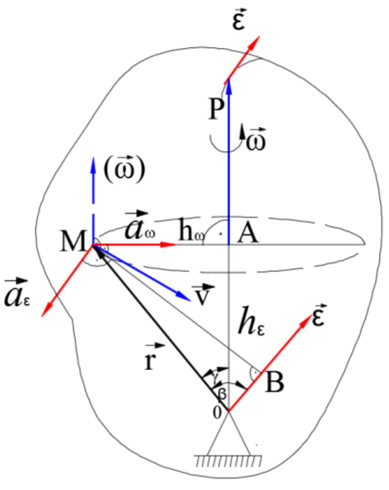
Prva komponenta ubrzanja $\vec{a}_\varepsilon$, naziva se *obrtno ubrzanje tačke M* i određena je sa:

$$\vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} = (\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2) \times \vec{r} = \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{r} + \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{r}, \text{ odnosno}$$

$$\vec{a}_\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}_0 \times \vec{r} + (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}) \times \vec{r} \tag{3.97}$$

Prema tome, vektor obrtnog ubrzanja tačke određen je sa,

$$\vec{a}_\varepsilon = \vec{a}_{\varepsilon 1} + \vec{a}_{\varepsilon 2} \tag{3.98}$$



sl.63.

Druga komponenta ubrzanja $\vec{a}_\omega$, naziva se *aksipetalno ubrzanje tačke M*, čiji je vektor ubrzanja određeno sa

$$\vec{a}_\omega = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{3.99}$$

Sada se, vektor ubrzanja proizvoljne tačke u odnosu na pokretni koordinatni sistem $O_{\xi\eta\zeta}$, može napisati u obliku

$$\vec{a} = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ \varepsilon_\xi & \varepsilon_\eta & \varepsilon_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ v_\xi & v_\eta & v_\zeta \end{vmatrix} \tag{3.100}$$

odnosno, u odnosu na nepokretni koordinatni sistem O_{xyz}, kao

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \tag{3.101}$$

gdje su $\vec{\lambda}, \vec{\mu}\ i\ \vec{v}$ jedinični vektori pokretnog koordinatnog sistema $O_{\xi\eta\zeta}$ a $\vec{\imath}, \vec{\jmath}\ i\ \vec{k}$ jedinični vektori nepokretnog koorinatnog sistema O_{xyz}.

Projekcije vektora ubrzanja $\vec{a}$ tačke M tijela na ose pokretnog sistema reference $O_{\xi\eta\zeta}$ određene su izrazima,

$$a_\xi = \varepsilon_\eta\, \zeta - \varepsilon_\zeta\, \eta + \omega_\eta v_\zeta - \omega_\zeta v_\eta$$
$$a_\eta = \varepsilon_\zeta \xi - \varepsilon_\xi\, \zeta + \omega_\zeta v_\xi - \omega_\xi v_\zeta \tag{3.102}$$
$$a_\zeta = \varepsilon_\xi \eta - \varepsilon_\eta \xi + \omega_\xi v_\eta - \omega_\eta v_\xi$$

zamjenjujući,

$$v_\xi = \omega_\eta\, \zeta - \omega_\zeta \eta;\ \ v_\eta = \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta \text{ i }\ v_\zeta = \omega_\xi\, \eta - \omega_\eta \xi,$$

jednačina za a_ξ, svodi se na oblik,

$$a_\xi = \varepsilon_\eta\, \zeta - \varepsilon_\zeta\, \eta + \omega_\eta(\omega_\xi\, \eta - \omega_\eta \xi) - \omega_\zeta(\omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta) =$$
$$= \varepsilon_\eta\, \zeta - \varepsilon_\zeta\, \eta + \omega_\xi \omega_\eta\, \eta + \omega_\xi \omega_\zeta\, \zeta - \xi(\omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2)$$

Ako za kvadrat ugaone brzine, iskoristimo izraz,

$$\omega^2 = \omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2, pa\ je\ \ \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2 = \omega^2 - \omega_\xi^2$$

tada se predhodna jednačina, kao i ostale jednačine sistema (3.95), svode na oblik,

$$a_\xi = \varepsilon_\eta\, \zeta - \varepsilon_\zeta\, \eta + \omega_\xi\, (\xi\omega_\xi + \eta\omega_\eta + \zeta\omega_\zeta) - \xi\omega^2$$
$$a_\eta = \varepsilon_\zeta\, \xi - \varepsilon_\xi\, \zeta + \omega_\eta\, (\xi\omega_\xi + \eta\omega_\eta + \zeta\omega_\zeta) - \eta\omega^2 \tag{3.103}$$
$$a_\zeta = \varepsilon_\xi\, \eta - \varepsilon_\eta\, \xi + \omega_\zeta\, (\xi\omega_\xi + \eta\omega_\eta + \zeta\omega_\zeta) - \zeta\omega^2$$

Analognim postupkom iz relacije (3.95) dobićemo vrijednosti za projekcije vektora ubrzanja tačke M na ose nepokretnog koordinatnog sistema O_{xyz}, kao

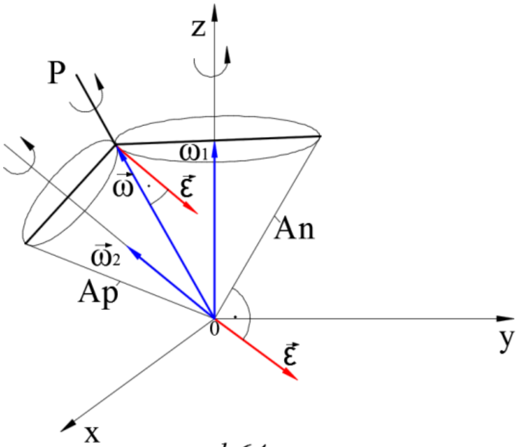
$$a_x = \varepsilon_y\, z - \varepsilon_z\, y + \omega_x\, (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - x\omega^2$$
$$a_y = \varepsilon_z\, x - \varepsilon_x\, z + \omega_y\, (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - y\omega^2 \tag{3.104}$$
$$a_z = \varepsilon_x\, y - \varepsilon_y\, x + \omega_z\, (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - z\omega^2$$

Intenzitet vektora ubrzanja tačke M, određuje se obrascem

$$a = \sqrt{a_\xi^2 + a_\eta^2 + a_\zeta^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{3.105}$$

Projekcijom vektora ubrzanja na ose pokretnog i nepokretnog koordinatnog sistema, mogu se naći skalarne vrijednosti komponentnih ubrzanja, odnosno intenzitet ukupnog ubrzanja tačke tjela koja vrši sferno kretanje.

3.5.7. Precesiono kretanje krutog tijela



sl.64.

Obrtanje krutog tijela oko nepokretne tačke, kada se vektor trenutne ugaone brzine mijenja samo po pravcu, tj. kada je vektor ugaone brzine konstantnog intenziteta $|\vec{\omega}| = cons.$, naziva se *precesiono kretanje krutog tijela*. Tada su pokretni i nepokretni aksoidi pravi kružni konusi sa tjemenom u nepokretnoj tački *O (sl.64)*.

Ako se sa $\vec{\omega}_1$ označi ugaona brzina kojom se pri obrtanju tijela oko nepokretne tačke *O* kotrlja pokretni aksoid A_p po nepokretnom aksiodu A_n, obrćući se oko nepokretne ose O_z, onda se vekor trenutnog ugaonog ubrzanja tijela može odrediti kao,

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_2 = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}, \tag{3.106}$$

jer je $\omega = const.$, pa je komponenta $\varepsilon_1 = 0$. Sa $\vec{\omega}_1$ označena je ugaona brzina obrtanja vektora $\vec{\omega}$ oko nepokretne tačke a sa $\vec{\omega}_2$ označena je sopstvena ugaona brzina aksoida A_p.

Do ove jednačine moguće je doći i na taj način što se odredi brzina kraja vektora $\vec{\omega}$ po Ojlerovom obrascu,

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega} \tag{3.106a}$$

Obrtno ubrzanje proizvoljne tačke M, određeno je izrazom

$$\overrightarrow{a_\varepsilon} = \overrightarrow{a_{\varepsilon_2}} = \overrightarrow{\varepsilon_2} \times \vec{r} = (\overrightarrow{\omega_1} \times \vec{\omega}) \times \vec{r} \tag{3.107}$$

jer je $\varepsilon_1 = 0$, pošto je $\omega = cons.$

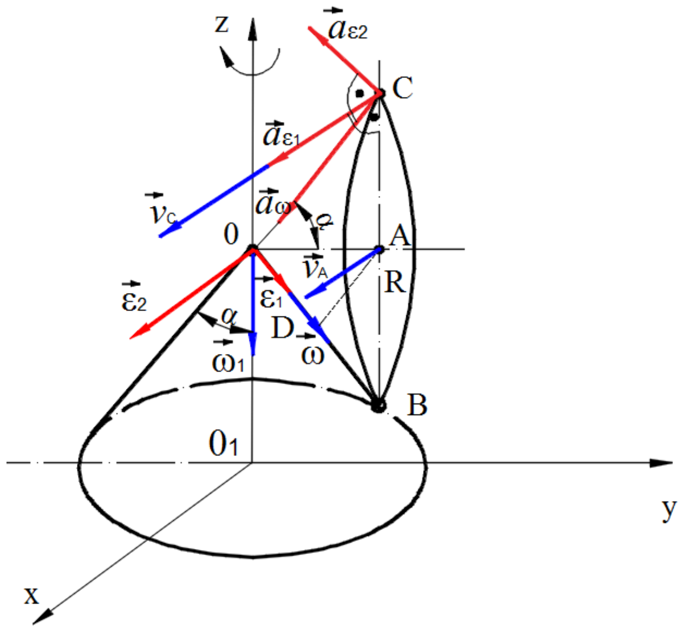
Na ovaj način pri precesionom kretanju hodograf vektora trenutne ugaone brzine je krug, pa je tangenta na kružnu putanju pravac vektora trenutnog ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$, a time se jednostavno određuje i pravac vektora $\overrightarrow{a_\varepsilon}$ koji je normalan na pravac vektora $(\vec{\varepsilon}, \vec{r})$.

Zadaci

Zadatak 3.10. Prav kružni konus poluprečnika *R*=20 [cm] kotrlja se bez klizanja po nepokretnom konusu, tako da mu tačka *O* za vrijeme kretanja ostaje nepokretna. Brzina tačke *A* konusa iznosi $v_A = 10t \ \left[\frac{cm}{s}\right]$.
Odrediti ubrzanje tačke *C* pokretnog konusa u trenutku *t*=2 [s], ako je ugao pri vrhu oba konusa jednak $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ (*sl.3.10*).

Rješenje
Pošto se pokretni konus kotrlja bez klizanja po nepokretnom konusu, to je položaj trenutne ose obrtanja određen izvodnicom *OB* i duž te ose usmjeren je i vektor trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ tijela (*sl.3.10.*). Na osnovu toga slijedi da je intezitet ugaone brzine određen izrazom:

$$\omega = \frac{v_A}{\overline{AD}} = \frac{t}{R\cos\alpha} = 5\sqrt{2}t \quad \left[\frac{cm}{s}\right]$$



sl.3.10.

Pošto se trenutna ugaona brzina mijenja i po intezitetu i po pravcu, to je na osnovu jednačine slijedi da je vektor trenutnog ugaonog ubrzanja moguće napisati u obliku:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$$

Komponenta $\vec{\varepsilon}_1$ ugaonog ubrzanja tijela usmjerena je duž prave *OB*, tj. duž vektora trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ jer ona određuje promjenu inteziteta ugaone brzine i određuje se obrascem:

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{2}\; s^{-2}$$

Da bismo odredili komponentu $\vec{\varepsilon}_2$ ugaonog ubrzanja tijela kojom se određuje promjena pravca vektora ugaone brzine, iskoristićemo jednačinu (3.63b) prema kojoj je,

$$\overrightarrow{\varepsilon_2} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}$$

Prema ovoj jednačini potrebno je da odredimo ugaonu brzinu $\vec{\omega}_1$ kojom se obrće vektor ugaone brzine $\vec{\omega}$ oko ose *Oz*. Kada konstruišemo trougao vektora ugaonih brzina (*sl.3.10*), dobićemo:

$$\omega_1 = \omega \cos 45° = \frac{1}{2} t\; s^{-1}$$

Vektor $\vec{\omega}_1$ usmjeren je duž ose *Oz* na dole, pa tada, s obzirom na to da je poznata i ugaona brzina tijela ω, nalazimo da je intenzitet komponente ugaonog ubrzanja

$$\varepsilon_2 = |\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}| = \omega_1\, \omega \sin\frac{\pi}{4} = \frac{t^2}{4} \quad [s^{-2}]$$

a kao vektor, komponenta ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}_2$, upravna je na ravan *OAB* i paralelna je vektoru brzine $\vec{v}_A$.

Na osnovu određenih komponenata vektora trenutnog ugaonog ubrzanja tijela, ubrzanje tačke *C* odredićemo relacijom:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{\varepsilon_1} + \vec{a}_{\varepsilon_2} + \vec{a}_\omega$$

Komponenta obrtnog ubrzanja tačke *C*,

$$\vec{a}_{\varepsilon_1} = \vec{\varepsilon}_1 \times \overrightarrow{OC},$$

usmjerena je po normali na ravan vektora ε_1 i $\overrightarrow{OC}$ i paralelna je brzini $\vec{v}_A$.

Intezitet te komponente ubtzanja određen je izrazom:

$$a_{\varepsilon_1} = \varepsilon_1\, \overline{OC} \cdot \sin 90° = 20 \frac{cm}{s^2}.$$

Komponenta obrtnog ubrzanja tačke *C*,

$$\vec{a}_{\varepsilon_2} = \vec{\varepsilon}_2 \times \overrightarrow{OC}$$

usmjerena je po normali na vektoru $\overrightarrow{OC}$ u ravni *COB* a po intezitetu je jednaka:

$$a_{\varepsilon_2} = \varepsilon_2\, \overline{OC} \cdot \sin 90° = 5\sqrt{2}t^2 \ \frac{cm}{s^2}$$

Aksipetalno ubrzanje tačke *C* određeno je formulom:

$$\vec{a}_\omega = \vec{\omega} \times \vec{v}_c$$

i usmjereno je po izvodnici konusa *OC* sa smjerom ka tački *O*, a njegov intezitet je:

$$a_\omega = h_\omega \omega^2 = \overline{OC}\, \omega^2 = 10\sqrt{2}\, t^2 \ \frac{cm}{s^2}.$$

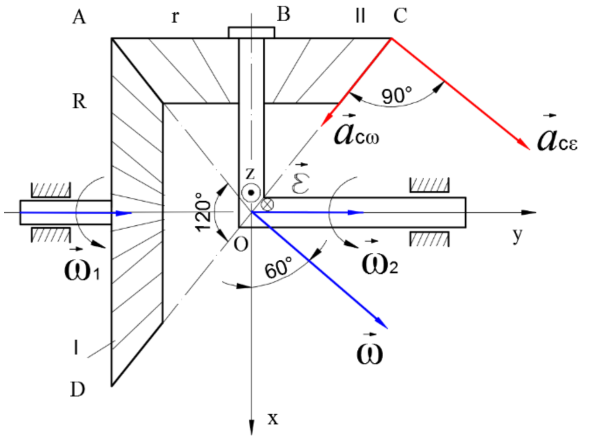
Ubrzanje tačke *C* određeno je vektorskim zbirom tri među sobom upravne komponente, pa je intezitet ubrzanja tačke *C* određen izrazom:

$$a_C = \sqrt{a_{\varepsilon_1}^2 + a_{\varepsilon_2}^2 + a_\omega^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{2}t^4 + 2t^4}$$

a u trenutku *t*=2 *s*, ono iznosi: $\boldsymbol{a_C = 20\sqrt{11}\ \frac{cm}{s^2}}$**.**

Zadatak 3.11. Konusni zupčanik *I*, poluprečnik R obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω_1 oko horizontalne nepokretne ose. Zupčanik *II* poluprečnika R koji je zahvaćen zupčanikom *I* dovodi se u kretanje pomoću krivaje savijene pod pravim uglom, koja se obrće ugaonom brzinom $\omega_2 = \frac{3}{2}\omega_1$, pri čemu je smjer ugaone brzine ω_2 isti kao i smjer ugaone brzine ω_1 (*sl.3.11.*).

Odrediti trenutnu ugaonu brzinu ω i trenutno ugaono ubrzanje ε zupčanika *II* kao i ubrzanje tačke C zupčanika *II*, ako je ugao $2\alpha_1 = 120°, 2\alpha_2 = 60°$, a ose zupčanika se sjeku u tački O.



sl.3.11.

Rješenje:

Pošto je brzina tačke A zupčanika *I* poznata, to sobzirom da je ona zajednička tačka za oba zupčanika, možemo saglasno Ojlerovoj formuli napisati:

$$\vec{v}_A = R\omega_1\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & 0 \\ -R & -r & 0 \end{vmatrix} = (\omega_y R - \omega_x r)\vec{k} \tag{a}$$

Isto tako polazeći od izraza za brzinu tačke B, kao tačke koja pripada krivaji i zupčaniku *II*, možemo napisati:

$$\vec{v}_B = R\omega_2\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & 0 \\ -R & 0 & 0 \end{vmatrix} = R\,\omega_y\,\vec{k} \tag{b}$$

Iz jednačina (a) i (b), neposredno dobijamo:

$$\omega_y = \omega_2 = \frac{2}{3}\omega_1;$$

$$r\omega_x = R(\omega_2 - \omega_1) \Rightarrow \frac{R\sqrt{3}}{3}\omega_x = R(\omega_2 - \omega_1) \Rightarrow$$
$$\omega_x = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1$$

pa je intezitet trenutne ugaone brzine, određen izrazom:

$$\boldsymbol{\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} = \sqrt{3}\omega_1\ s^{-1}}$$

Ugao α, koji vektor ugaone brzine $\vec{\omega}$ gradi sa osom *Ox*, određen se relacijom:

$$tg\ \alpha = \frac{\omega_y}{\omega_x} = \sqrt{3} \Rightarrow\ \alpha = 60°$$

Pošto je trenutna ugaona brzina $\vec{\omega}$ konstantnog inteziteta, to je trenutno ugaono ubrzanje zupčanika *II* određeno formulom:

$$\boldsymbol{\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_2 x \vec{\omega} \Rightarrow\ |\vec{\varepsilon}| = \varepsilon = \omega_2\, \omega\, sin\, 30° = \frac{3\sqrt{3}}{4}\ \omega_1^2}$$

a kao vektor $\vec{\varepsilon}$, suprotan je pravcu ose O_z i prolazi kroz tačku O, tj $\vec{\varepsilon} = -\varepsilon\, \vec{k}$.

Ubrzanje tačke C, određeno je formulom:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{C_\varepsilon} + \vec{a}_{C_\omega} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OC} + \vec{\omega} \times \vec{v}_C.$$

Pri tome vektor $\vec{a}_{C_\varepsilon}$ je u ravni O_{xy}, a vektor $\vec{a}_{C_\omega}$ je u pravcu duži $\overline{OC}$ sa smjerenjem ka tački *O*, (*sl.3.11.*).
Brzina tačke *C* određena je sa,

$$\vec{v}_C = \overrightarrow{OC} \times \vec{\omega} = -\overline{OC}\omega\, \vec{k}$$

Komponente ubrzanja tačke C, određene su izrazima:

$$a_{C_\varepsilon} = \overline{OC}\ \varepsilon = \frac{3}{2}R\omega_1^2;$$
$$a_{C_\omega} = \overline{OC}\ \omega^2 = 2R\sqrt{3}\omega_1^2$$

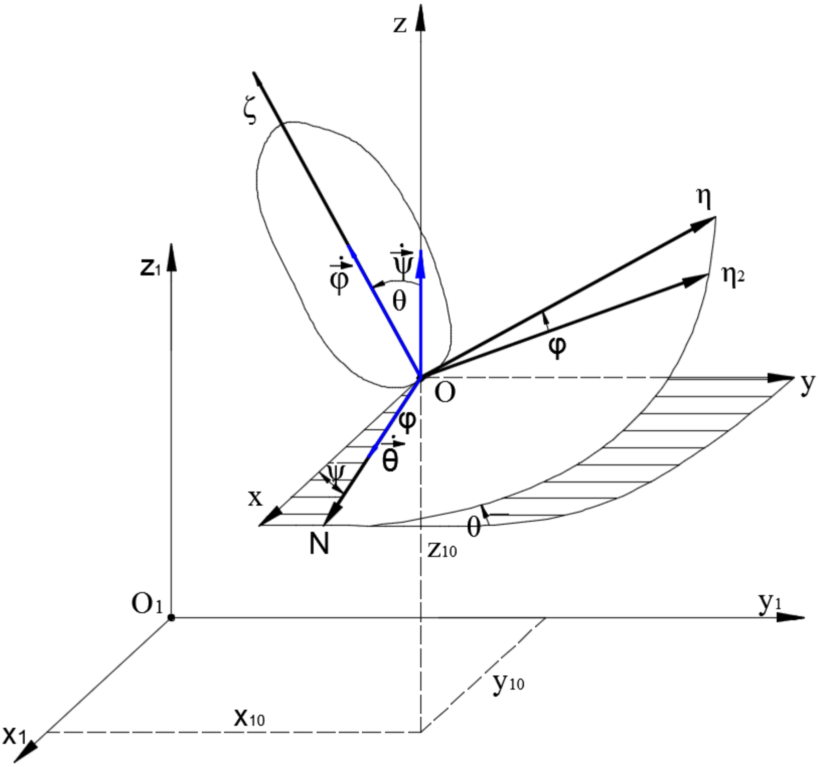
pa je intenzitet ubrzanja tačke C,

$$\boldsymbol{a_C = \sqrt{a_{C_\varepsilon}^2 + a_{C_\omega}^2} = \frac{1}{2}R\omega_1^2\sqrt{57}}$$

3.6. OPŠTE KRETANJE SLOBODNOG KRUTOG TIJELA

3.6.1. Jednačine opšteg kretanja slobodnog tijela

Opšte kretanje slobodnog krutog tijela jeste takvo kretanje pri kome tijelo može da zauzme bilo koji položaj u prostoru (*sl.65.*).



sl.65.

Određivanje položaja tijela, pri opštem kretanju, svodi se na određivanje položaja pokretnog koordinatnog sistema $O_{\xi\eta\zeta}$, koji je čvrsto vezan za pokretno tijelo, u odnosu na nepokretni sistem referencije $O_{1x_1y_1z_1}$. Položaj tijela pri kretanju u odnosu na sistem referencije O_{xyz}, koji je čvrsto vezan za tačku O pokretnog tijela, određen je preko tri Ojlerova ugla *ψ, φ i θ*. Sobzirom da se i sam pol *O* kreće, položaj pola *O* u odnosu na nepokretni sistem referencije određen je sa tri Dekartove koordinate x_{1O}, y_{1O} *i* z_{1O}. Na taj način, položaj pokretnog koordinatnog sistema $O_{\xi\eta\zeta}$ u odnosu na nepokretni sistem referencije $O_{1x_1y_1z_1}$, odnosno položaj krutog tijela pri opštem retanju, određen je sa šest generalisanih koordinata: x_{1O}, y_{1O}, z_{1O}, ψ, θ *i* φ.

To znači da slobodno tijelo koje vrši opšte kretanje ima šest stepeni slobode, tj. može da vrši šest nezavisnih kretanja, tri translacije duž osa nepokretnog koorinatnog sistema i tri nezavisne rotacije oko osa koje prolaze kroz pol *O*, što je određeno Ojlerovim uglovima.

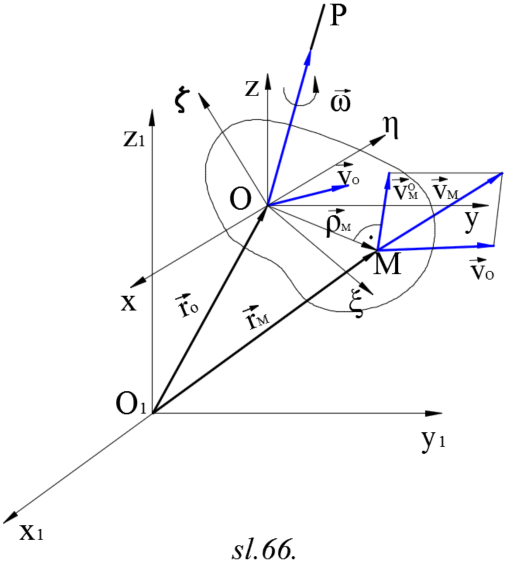
Konačne jednačine opšteg kretanja slobodnog krutog tijela ili zakon opšteg kretanja slobodnog krutog tijela imaju oblik,

$$\begin{array}{lll} x_{10} = f_1(t) & y_{10} = f_2(t) & z_{10} = f_3(t) \\ \psi = f_4(t) & \theta = f_5(t) & \varphi = f_6(t) \end{array} \qquad (3.108)$$

Prve tri jednačine određuju translaciju pola O, zajedno sa sistemom referencije *Oxyz*, tj. prenosno kretanje krutog tijela koje je određeno vektorom brzine $\vec{v}_0$ i vektorom ubrzanja $\vec{a}_o$.

Poslednje tri jednačine određuju obrtanje krutog tijela oko pola *O*, tj. relativno kretanje krutog tijela u odnosu na nepokretni sistem referencije $O_{1x_1y_1z_1}$.

3.6.2. Brzine tačaka tijela koje vrši opšte kretanje



sl.66.

Položaj proizvoljne tačke *M* u odnosu na nepokretni sistem referencije $O_{1x_1y_1z_1}$, određen je vektorom položaja,

$$\vec{r}_M = \vec{r}_o + \vec{\rho}_M \qquad (3.109)$$

gdje je $\vec{r}_o$ vektor položaja pokretnog pola *O*, a $\vec{\rho}_M$ je vektor položaja tačke *M* u odnosu na pokretni pol *O*.

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_o + \vec{\rho}_M) = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_M}{dt} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_M \qquad (3.110)$$

Druga komponenta određuje brzinu tačke M tijela pri njegovom obtanju oko pola *O* kao nepokretne tačke, tj. $\vec{v}_M^O = \vec{\omega}\, x \vec{\rho}_M$, tako da je vektor brzine tačke krutog tijela pri njegovom opštem kretanju (*sl.66.*), određen sa

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_M^O \tag{3.111}$$

Brzina proizvoljne tačke *M*, pri opštem kretanju slobodnog krutog tijela, jednaka je vektorskom zbiru translatorne brzine $\vec{v}_O$ pokretnog pola *O* i obrtne brzine $\vec{v}_M^O$ koju tačka M ima kada se tijelo obrće oko pola *O*, kao nepokretne tačke, odnosno oko trenutne ose koja prolazi kroz pol *O*.

3.6.3. Ubrzanje tačaka tijela koje vrši opšte kretanje

Vektor ubrzanja proizvoljne tačke M određen je prvim izvodom po vremenu vekotra brzine tačke M:

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_o + \vec{v}_M^O) = \frac{d\vec{v}_o}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{v}_M^O) \tag{3.112}$$

odnosno,

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_o}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_M) = \frac{d\vec{v}_o}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}_M}{dt} \tag{3.113}$$

Jednačinu (3.113) možemo napisati u obliku,

$$\vec{a}_M = \vec{a}_o + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega} \times \vec{v}_M^O = \vec{a}_o + \vec{a}_M^O. \tag{3.114}$$

Komponenta $\vec{a}_o$ predstavlja *translatorno ubrzanje* usljed kretanje pola *O*, dok komponenta,

$$\vec{a}_M^O = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega} \times \vec{v}_M^O \tag{3.115}$$

predstavlja komponentu ubrzanja tačke M, koja nastaje usled obrtanja tijela oko pola *O*, koja se naziva *obrtno ubrzanje tačke M oko pola O*.

Ubrzanje proizvoljne tačke *M* pri opštem kretanju slobodnog krutog tijela jednaka je vektorskom zbiru translatornog ubrzanja $\vec{a}_o$ pokretnog pola *O* i obrtnog ubrzanja $\vec{a}_M^O$ koje tačka M ima kada se tijelo obrće oko pola O, kao nepokretne tačke, odnosno oko trenutne obrtne ose koja prolazi kroz pol *O*.

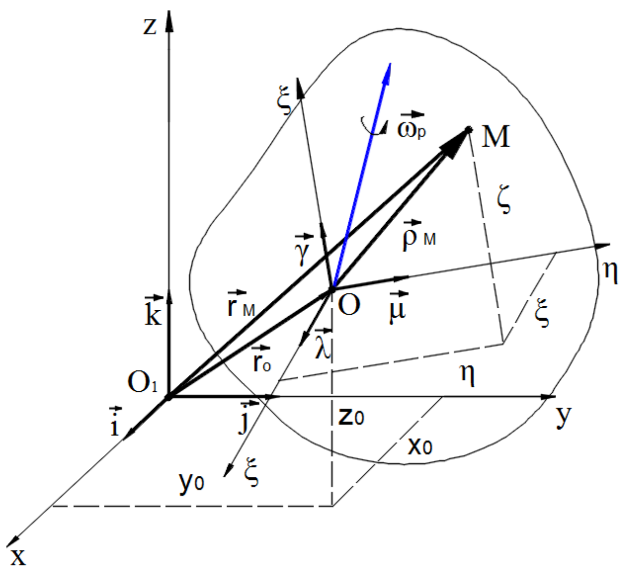
4. SLOŽENO KRETANJE TAČKE

U ranijim razmatranjima, u kinematici tačke, analiza je vršena a da se nije vodilo računa o tome da li tačka učestvuje u jednom ili više kretanja. Kretanje tačke koja učestvuje u više komponentalnih kretanja naziva se *složeno kretanje* i može se posmatrati u odnosu na uslovno nepokretni koordinatni sistem vezan za Zemlju, ili u odnosu na pokretni kordinatni sistem koji je vezan za tijelo po kome ili u kome se kreće posmatrana tačka.

4.1. RELATIVNO, PRENOSNO I APSOLUTNO KRETANJE TAČKE

Neka se tačka *M* kreće po tijelu za koje je čvrsto vezan pokretni sistem referencije $O_{\xi\eta\zeta}$ i neka se istovremeno tijelo proizvoljno kreće u odnosu na nepokretni sistem referencije O_{1xyz}, tj. neka se pokretni sistem referencije $O_{\xi\eta\zeta}$ kreće na proizvoljan način u odnosu na nepokretni sistem referencije O_{1xyz} (*sl.67.*).

Kretanje tačke M u odnosu na pokretni sistem referencije $O_{\xi\eta\zeta}$, odnosno pokretno tijelo, naziva se <u>relativno kretanje tačke</u>.



sl.67.

Kretanje tačke M u odnosu na nepokretni sistem referencije O_{1xyz}, odnosno nepokretno tijelo, naziva se apsolutno kretanje tačke ili složeno kretanje tačke. Kretanje pokretnog sistema referencije $O_{\xi\eta\zeta}$, odnosno pokretnog tijela, u odnosu na nepokretni sistem referencije O_{1xyz}, odnosno nepokretno tijelo, naziva se prenosno kretanje.

U vezi sa složenim kretanjem tačke uvodi se pojam apsolutne, relativne i prenosne brzine tačke i pojam apsolutnog, relativnog i prenosnog ubrzanja tačke.

Apsolutna brzina $\vec{v}$ i apsolutno ubrzanje $\vec{a}$ tačke M su brzina i ubrzanje koje tačke M ima pri kretanju u odnosu na nepokretni sistem referencije O_{1xyz}.

Relativna brzina $\vec{v}_r$ i relativno ubrzanje $\vec{a}_r$, tačke M su brzina u ubrzanje koje tačke M ima pri razmatranju kretanja tačke u odnosu na pokretni sistem referencije $O_{\xi\eta\zeta}$.

Prenosna brzina $\vec{v}_p$ i prenosno ubrzanje $\vec{a}_p$ tačke M, su apsolutna brzina i apsolutno ubrzanje one tačke pokretnog tijela za koje je čvrsto vezan pokretni sistem referencije $O_{\xi\eta\zeta}$, sa kojom se u datom trenutku vremena poklapa pokretna tačka *M*.

Položaj pokretnog sistema referencije $O_{\xi\eta\zeta}$, u odnosu na nepokretni sistem referencije O_{1xyz}, određen je vektorom položaja $\overrightarrow{r_o}$ pola *O* i jediničnim vektorima $\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{v}$ pokretnih osa.

Položaj tačke M, u odnosu na pokretni sistem referencije $O_{\xi\eta\zeta}$, određen je vektorom položaja:

$$\vec{\rho}_M = \xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{v} \qquad (4.1)$$

Ako je vektor položaja tačke *M* poznata funkcija vremena, onda je relativno kretanje tačke određeno.

Položaj tačke *M*, u odnosu na nepokertni sistem referencije O_{1xyz}, određen je vektorom položaja:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_o + \vec{\rho}_M = \vec{r}_o + \xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{v} \qquad (4.2)$$

pri čemu su promjenjljjive ne samo veličine $\vec{r}_o$ i relativne koordinate položaja tačke M(ξ, η, ζ), već i jedinični vektori pokretnog koordinatnog sistema

$\vec{\lambda}, \vec{\mu}\ i\ \vec{v}$, koji mijenjaju pravac prilikom obrtanja pokretnog sistema referencije oko pola *O*.

4.2. BRZINA TAČKE PRI SLOŽENOM KRETANJU

Apsolutna brzina tačke *M* jednaka je prvom izvodu po vremenu vektora položaja $\vec{r}_M$ date tačke, odnosno

$$\vec{v}_M = \vec{v} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_M}{dt} \tag{4.3}$$

Pri tome je apsolutni izvod vektora položaja $\vec{\rho}_M$ određen izrazom:

$$\frac{d\vec{\rho}_M}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\vec{\lambda} + \frac{d\eta}{dt}\vec{\mu} + \frac{d\zeta}{dt}\vec{v} + \xi\frac{d\vec{\lambda}}{dt} + \eta\frac{d\vec{\mu}}{dt} + \zeta\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{4.4}$$

Uzimajući u obzir da su izvodi jediničnih vektora pokretnih osa određeni relacijama

$$\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\lambda}, \quad \frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\mu}, \text{ i } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} \tag{4.5}$$

to se apsolutni izvod vektora $\vec{\rho}_M$ može napisati u obliku

$$\frac{d\vec{\rho}_M}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\vec{\lambda} + \frac{d\eta}{dt}\vec{\mu} + \frac{d\zeta}{dt}\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\lambda} + \vec{\omega} \times \vec{\mu} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

odnosno,

$$\frac{d\vec{\rho}_M}{dt} = \frac{d_r\vec{\rho}_M}{dt} + \vec{\omega} \times \left(\xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{v}\right) = \vec{v}_r + \vec{\omega}_p \times \vec{\rho}_M \tag{4.6}$$

U prethodnoj jednačini je sa $\vec{\omega} = \vec{\omega}_p$ označena trenutna ugaona brzina prenosnog kretanja pokretnog sistema referencije $O_{\xi\eta\zeta}$ (pokretnog tijela), dok je sa $\frac{d_r\vec{\rho}_M}{dt}$ označen izvod vektora položaja $\vec{\rho}_M$, određen u pokretnom koordinatnom sistemu $O_{\xi\eta\zeta}$, što određuje vektor relativne brzine $\vec{v}_r$.

<u>Relativna brzina tačke *M*</u> jednaka je:

$$\vec{v}_r = \frac{d_r\vec{\rho}_M}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\vec{\lambda} + \frac{d\eta}{dt}\vec{\mu} + \frac{d\zeta}{dt}\vec{v} \tag{4.7}$$

Relativna brzina tačke, predstavlja brzinu tačke *M* pod prepostavkom da se mijenjaju samo relativne koordinate ξ, η, ζ, dok se prepostavlja da pokretni sistem referencije uslovno miruje.
Apsolutna brzina tačke *M* je:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_M}{dt} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_p \times \vec{\rho}_M + \vec{v}_r \tag{4.8}$$

Ako zamislimo da je tačka *M* čvrsto vezana za pokretno tijelo (pokretni sistem referencije) onda je njena relativna brzina jednaka nuli $\vec{v}_r = 0$, pa iz prethodnog izraza definišemo prenosnu brzinu tačke *M*, kao

$$\vec{v}_p = \vec{v}_o + \vec{\omega}_p \times \vec{\rho}_M \tag{4.9}$$

Prenosna brzina tačke *M*, prestdavlja brzinu tačke *M* pod pretpostavkom da tačka *M* ne vrši relativno kretanje u odnosu na pokretno tijelo (pokretni sistem referencije), već je tačka čvrsto vezana za pokretno tijelo i kreće s zajedno sa njim u odnosu na nepokretni sistem referencije.

Sobzirom da tijelo vrši opšte kretanje u prostoru to je prenosna brzina bilo koje njegove tačke, u ovom slučaju prenosna brzina tačke *M*, određena vektorskim zbirom brzine pola *O* $\vec{v}_o$ i obrtne brzine $\vec{\omega}_p \times \vec{\rho}_M$ usljed obrtanja pokretnog tijela oko pola *O*.
Konačno, apsolutna brzina tačke pri njenom složenom kretanju jednaka je:

$$\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_r \tag{4.10}$$

tj. apsolutna brzina tačke *M* jednaka je vektorskom zbiru prenosne i relativne brzine tačke.
Intenzitet apsolutne brzine tačke, pri složenom kretanju, je

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_p^2 + v_r^2 + 2v_p v_r cos < (\vec{v}_p, \vec{v}_r)}$$

Ako pokretno tijelo vrši ravno kretanje, tj. prenosno kretanje tačke je ravno kretanje, prenosna brzina se određuje obrascem:

$$\vec{v}_p = \vec{v}_o + \vec{\omega}_p \times \vec{\rho}_M = \vec{v}_o + \vec{v}_M^o \tag{4.11}$$

Ako pokretno tijelo vrši obrtanje oko neporetne tačke ili oko nepokretne ose onda je prenosna brzina određena sa:

$$\vec{v}_p = \vec{\omega}_p \times \vec{\rho}_M \tag{4.12}$$

Ako tijelo vrši translatorno kretanje, prenosna brzina tačke je $\vec{v}_p = \vec{v}_o$.

4.3. UBRZANJE TAČKE PRI SLOŽENOM KRETANJU

Vektor apsolutnog ubrzanja tačke *M*, pri složenom kretanju tačke, određeno je prvim izvodom po vremenu vektora apsolutne brzine tačke *M*:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_o + \vec{\omega}_p \times \vec{\rho}_M + \vec{v}_r\right) = \frac{d\vec{v}_o}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_p}{dt} \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega}_p \times \frac{d\vec{\rho}_M}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt} \tag{4.13}$$

Apsolutni izvod relativne brzine $\vec{v}_r$ tačke M, određen je na isti način kao i apsolutni izvod vektora $\vec{\rho}_M$, tj.

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d_r\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega}_p \times \vec{v}_r = \vec{a}_r + \vec{\omega}_p \times \vec{v}_r \tag{4.14}$$

<u>Relativno ubrzanje tačke</u> *M*, u prethodnom izrazu je

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d_r^2\vec{\rho}_M}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2}\vec{\lambda} + \frac{d^2\eta}{dt^2}\vec{\mu} + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\vec{\nu} \tag{4.15}$$

i ono karaktreriše promjenu relativne brzine $\vec{v}_r$ pod pretpostavkom da pokretni sistem referencije miruje.

<u>Apsolutno ubrzanje tačke, svodi se na oblik:</u>

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_o}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_p}{dt} \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega}_p \times \frac{d\vec{\rho}_M}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt}, \text{ odnosno}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_o + \vec{\varepsilon}_p \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega}_p \times \left(\vec{v}_r + \vec{\omega}_p \times \vec{\rho}_M\right) + \vec{a}_r + \vec{\omega}_p \times \vec{v}_r$$

pa je, vektor apsolutnog ubrzanja tačke određen sa

$$\vec{a} = \vec{a}_o + \vec{\varepsilon}_p \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega}_p \times \left(\vec{\omega}_p \times \vec{\rho}_M\right) + \vec{a}_r + 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r \tag{4.16}$$

Pri čemu je $\vec{a}_o$ ubrzavnje pola *O*, a $\vec{\varepsilon}_p$ je vektor trenutnog ugaonog ubrzanja pokretnog tijela, odnosno ugaono ubrzanje prenosnog kretanja.

<u>Prenosno ubrzanje tačke</u> *M* može se odrediti ako zamislimo da tačke *M* ne vrši relativno kretanje, već je čvrsto vezana za pokretno tijelo, tako da su relativna brzina i relativno ubrzanje jednaki nuli.
Onda je prenosno ubrzanje tačke, kada pokretno tijelo vrši opšte kretanje, određeno sa:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_o + \vec{\varepsilon}_p \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega}_p \times \left(\vec{\omega}_p \times \vec{\rho}_M\right) = \vec{a}_o + \vec{\varepsilon}_p \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega}_p \times \vec{v}_M^o \qquad (4.17)$$

U izrazu za apsolutno ubrzanje tačke, figuriše komponenta $2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r$, koja predstavlja *Koriolisovo ubrzanje*, tj.

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r \qquad (4.18)$$

Konačno, možemo napisati da je vektor apsolutnog ubrzanja tačke, pri složenom kretanju, određen relacijom

$$\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor} \qquad (4.19)$$

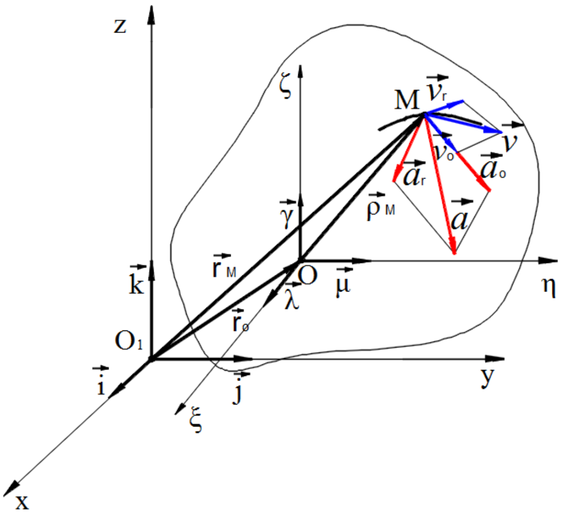
Odnosno, možemo kazati, da je apsolutno ubrzanje tačke pri njenom složenom kretanju jednako vektorskom zbiru prenosnog, relativnog i Koriolisovog ubrzanja.
Pošto u opštem slučaju, vektori prenosnog, relativnog i Koriolisovog ubrzanja nisu međusobno upravni, intezitet apsolutnog ubrzanja tačke *M*, u Dekartovom koordinatnom sistemu, moguće je odrediti ako se nađu projekcije vektora apsolutnog ubrzanja na tri upravne ose,

$$\begin{aligned} a_x &= a_{px} + a_{rx} + a_{corx} \\ a_y &= a_{py} + a_{ry} + a_{cory} \\ a_z &= a_{pz} + a_{rz} + a_{corz} \end{aligned} \qquad (4.20)$$

pa je intenzitet apsloutnog ubrzanja tačke određen sa,

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (4.21)$$

U slučaju kada je prenosno kretanje translatorno, tada je apsolutno ubrzanje tačke M jednako vektorskom zbiru prenosnog i relativnog ubrzanja tačke (*sl.68.a*).

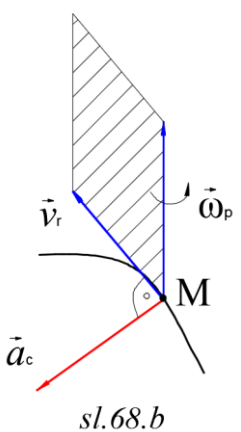


sl.68.a

U slučaju da se prenosno kretanje sastoji i od obrtanja, tada se vektoru apslolutnog ubrzanje tačke dodaje i komponenta Koriolisovog ubrzanja.

Konstrukcija vektora Koriolisovog ubrzanja

Koriolisovo ubrzanje, nazvano po francuskom naučniku G. Koriolisu (1792 – 1843), karakteriše uzajamno dejstvo prenosnog i relativnog kretanja tačke i određeno je dvostrukim vektorskim proizvodom vektora prenosne ugaone brzine $\vec{\omega}_p$ i vektora brzine relativnog kretanja tačke $\vec{v}_r$, kao



sl.68.b

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r \tag{4.22}$$

Intezitet Koriolisovog ubrzanja određen je sa:

$$|\vec{a}_{cor}| = 2|\vec{\omega}_p|\,|\vec{v}_r|\,sin\sphericalangle(\vec{\omega}_p, \vec{v}_r) \tag{4.23}$$

Pravac vektora $\vec{a}_{cor}$ upravan je na ravan koju obrazuju vektori $\vec{\omega}_p$ i $\vec{v}_r$, a smjer mu je takav da se posmatrano iz vrha vektora $\vec{a}_{cor}$ vidi obrtanje za najmanji ugao vektora $\vec{\omega}_p$ ka vektoru $\vec{v}_r$, u smjeru suportnom od obrtanja kazaljke na satu (*sl.68.b*).

Koriolisovo ubrzanje jednako je nuli kada je:

a) Prenosno kretanje translatorno, ondosno kada je $\vec{\omega}_p = 0$

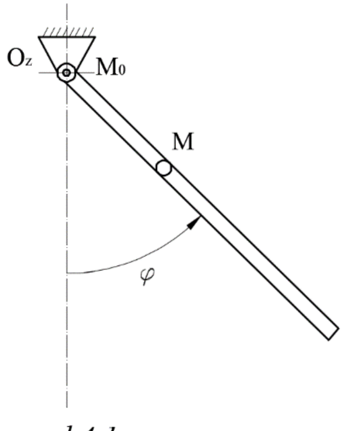
b) Kada su vektori $\vec{\omega}_p$ i $\vec{v}_r$ kolinearni

c) U trenucima kada je relativna brzina jednaka nuli $\vec{v}_r = 0$ ili kada je ugaona brzina prenosnog kretanja jednaka nuli $\vec{\omega}_p = 0$.

Zadaci

Zadatak 4.1. Metalna cijev, obrće se oko ose *Oz* po zakonu $\varphi = \pi t^2$, pri čemu se ugao φ mjeri u radijanima. Istovremeno se niz cijev kreće tačka *M* po zakonu $\overline{M_0 M} = b\ sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$, gdje se $\overline{M_0 M}$ mjeri u metrima *(sl.4.1)*. Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje tačke M u trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, ako je dužina cijevi $2b$.

Vrijeme t se mjeri u sekundama.



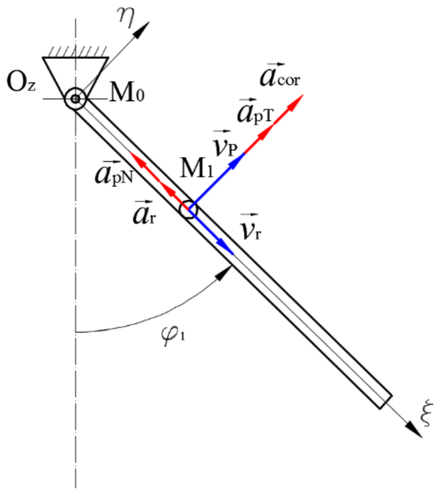
sl.4.1.

Rješenje:

Kretanje tačke *M* duž cijevi predstavlja relativno kretanje, dok je prenosno kretanje obrtanje cijevi oko ose *Oz*.

Položaj cijevi u trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$ je $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}\ [rad]$.

Položaj materijalne tačke u trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]\ je\ \ \xi = \overline{M_0 M_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} b\ [m]$.



sl.4.1a

Relativna brzina tačke M predstavlja prvi izvod po vremenu zakona kretanja materijalne tačke $\xi = \overline{M_0M}$, odnosno

$$v_r = \frac{d}{dt}(\overline{M_0M}) = b\frac{\pi}{2}\, cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\,\left[\frac{m}{s}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, relativna brzina tačke je

$$v_r = \sqrt{2}b\frac{\pi}{4}\,\left[\frac{m}{s}\right].$$

Prenosna brzina tačke M je,

$$v_p = \overline{M_0M}\cdot\dot{\varphi} = b\, sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cdot 2\pi t\,\left[\frac{m}{s}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, prenosna brzina tačke je

$$v_p = \frac{\sqrt{2}}{2}b\pi\,\left[\frac{m}{s}\right].$$

Pa je intenzitet apsolutne brzine tačke M, jednak

$$v_M = \sqrt{{v_r}^2 + {v_p}^2} = \sqrt{\mathbf{10}}\boldsymbol{b}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\left[\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}\right].$$

Relativno ubrzanje tačke M se dobija kao drugi izvod po vremenu zakona kretanja $\overline{M_0M}$:

$$a_r = \frac{d^2}{dt^2}(\overline{M_0M}) = \frac{dv_r}{dt} = -b\frac{\pi^2}{4}\ sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, relativno ubrzanje tačke M je

$$a_r = -\frac{\sqrt{2}}{8}b\pi^2\ \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Prenosno tangentno ubrzanje tačke je,

$$a_{pT} = \overline{M_0M_1} \cdot \ddot{\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{2}b2\pi\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

a u trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, iznosi

$$a_{pT} = \sqrt{2}b\pi\ \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Prenosno normalno ubrzanje tačke je,

$$a_{pN} = \overline{M_0M_1} \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}b4\pi^2t^2\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, ono iznosi

$$a_{pN} = \frac{\sqrt{2}}{2}b\pi^2\left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Koriolisovo ubrzanje je:

$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r$, odnosno

$$a_{cor} = 2\dot{\varphi} \cdot v_r \cdot \sin(\vec{\omega}_p, \vec{v}_r) = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}b\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}$$

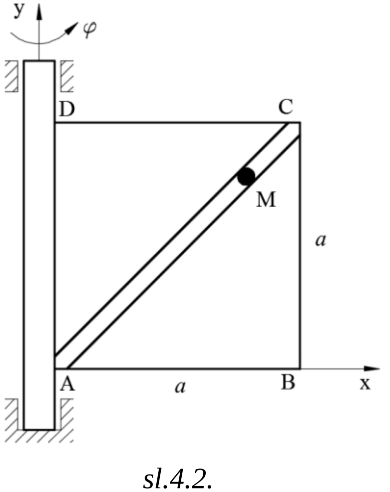
$$a_{cor} = \frac{\sqrt{2}}{2} b\pi^2 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Apsolutno ubrzanje tačke M iznosi,

$$a_M = \sqrt{\left(a_r + a_{pN}\right)^2 + \left(a_{pT} + a_{cor}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{8} b\pi^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} b\pi^2\right)^2 + \left(\sqrt{2} b\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} b\pi^2\right)^2}$$

$$\boldsymbol{a_M = b\pi \sqrt{\frac{41}{32}\pi^2 + 2\pi + 2}} \left[\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s^2}}\right].$$

Zadatak 4.2. Kvadratni ram ABCD se obrće oko ose *Oy* po zakonu $\varphi = \pi t^2 \; [rad]$, pri čemu se vrijeme t mjeri u sekundama. Istovremeno se duž dijagonalnog žlijeba $\overline{CA}$ kreće materijalna tačka M po zakonu $\overline{CM} = 2a\sqrt{2}t^2 \; [m]$ (*sl.4.2*). Ako je stranica rama dužine a, odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje tačke M u trenutku $t_1 = \frac{1}{2} [s]$.



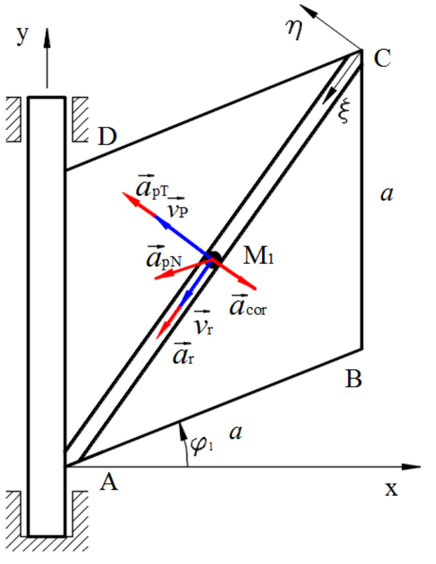
sl.4.2.

Rješenje:

Kretanje tačke *M* duž žlijeba, po zakonu $\xi = \overline{CM} = 2a\sqrt{2}t^2$, predstavlja relativno kretanje, dok je prenosno kretanje obrtanje rama oko ose *Oy* po zakonu $\varphi = \pi t^2$.

Položaj rama u trenutku $t_1 = \frac{1}{2} [s]$, određena je uglom $\varphi_1 = \frac{\pi}{4} \; [rad]$.

Položaj materijalne tačke M u trenutku $t_1 = \frac{1}{2} [s]$ je $\overline{CM_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \; [m]$.



sl.4.2a

Relativna brzina tačke M, predstavlja prvi izvod po vremenu zakona kretanja materijalne tačke $\xi = \overline{CM}$, odnosno

$$v_r = \frac{d}{dt}(\overline{CM}) = 4a\sqrt{2}t \left[\frac{m}{s}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, ona iznosi

$$v_r = 2a\sqrt{2} \left[\frac{m}{s}\right].$$

Prenosna brzina tačke M je:

$$v_p = \frac{a}{2} \cdot \dot{\varphi} = \frac{a}{2} 2\pi t \left[\frac{m}{s}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, ona iznosi

$$v_p = \frac{1}{2} a\pi \left[\frac{m}{s}\right].$$

Pa je apsolutna brzina tačke M

$$v_M = \sqrt{{v_r}^2 + {v_p}^2} = \boldsymbol{a}\sqrt{\mathbf{8} + \frac{\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}}\ \left[\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}\right].$$

Relativno ubrzanje tačke M, izračunava se kao drugi izvod po vremenu zakona kretanja $\overline{CM}$, odnosno

$$a_r = \frac{d^2}{dt^2}(\overline{CM}) = \frac{dv_r}{dt} = 4a\sqrt{2}\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, ono iznosi

$$a_r = 4a\sqrt{2}\ \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Prenosno tangentno ubrzanje je,

$$a_{pT} = \frac{a}{2}\cdot\ddot{\varphi} = \frac{a}{2}2\pi\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, ono iznosi

$$a_{pT} = a\pi\ \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Prenosno normalno ubrzanje je,

$$a_{pN} = \frac{a}{2}\cdot\dot{\varphi}^2 = \frac{a}{2}4\pi^2t^2\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, ono iznosi

$$a_{pN} = \frac{1}{2}a\pi^2\left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Koriolisovo ubrzanje je:

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r$$

$$a_{cor} = 2\dot{\varphi}\cdot v_r\cdot\sin(\vec{\omega}_p, \vec{v}_r) = 2\cdot\pi\cdot 2a\sqrt{2}\cdot\sin 135^0$$

$$a_{cor} = 4a\pi\ \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

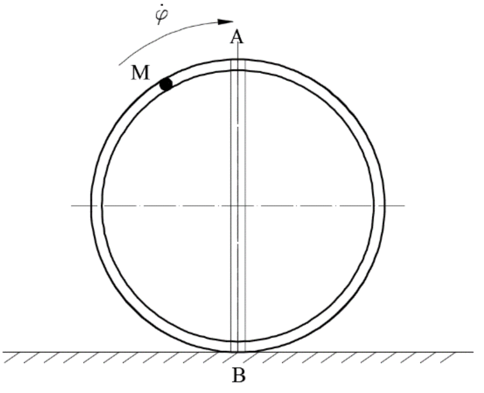
Apsolutno ubrzanje tačke M iznosi,

$$a_M = \sqrt{\left(a_r + a_{pN}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(a_{pT} - a_{cor}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(4a\sqrt{2} + \frac{1}{2}a\pi^2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (a\pi - 4a\pi)^2},\text{ odnosno}$$

$$\boldsymbol{a_M = a\sqrt{13\pi^2 + \frac{\pi^4}{8} + 32}\ \left[\frac{m}{s^2}\right]}.$$

Zadatak 4.3. Kružni disk, poluprečnika $R\ [cm]$, kotrlja se po podlozi po zakonu $\varphi = 2\pi t^2\ [rad]$, pri čemu se vrijeme t mjeri u sekundama. U početnom trenutku $t_0 = 0\ [s]$, žlijeb $\overline{AB}$ na disku bio je u vertikalnom položaju. Istovremeno se po žlijebu obima diska kreće materijalna tačka M po zakonu $\widehat{AM} = s(t) = 2R\pi t^2\ [cm]$ (*sl.4.3*). Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje tačke M u trenutku $t_1 = \frac{1}{2}\ s$.



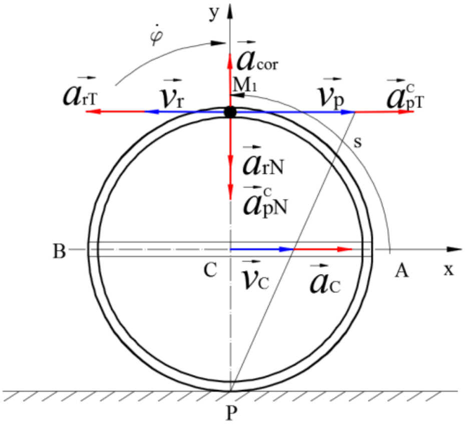
sl.4.3.

Rješenje:

Kretanje materijalne tačke *M* po obimu diska predstavlja relativno kretanje, dok je prenosno kretanje kotrljanje diska po podlozi.

Položaj diska u trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$ je $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}\ [rad]$, (*sl.4.3.a*).

Položaj materijalne tačke u trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$ je $\widehat{AM}_1 = \frac{R\pi}{2}\ [cm]$.



sl.4.3.a

Relativna brzina tačke M, predstavlja prvi izvod po vremenu zakona kretanja materijalne tačke $s = \widehat{AM}$, odnosno

$$v_r = \frac{d}{dt}\left(\widehat{AM}\right) = 4R\pi t \ \left[\frac{cm}{s}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, ono iznosi

$$v_r = 2R\pi \ \left[\frac{cm}{s}\right].$$

<u>Prenosna brzina tačke M:</u>

Kako tačka P predstavlja trenutni pol obrtanja diska, prenosna brzina tačke M se određuje kao:

$$v_p = \overline{PM_1} \cdot \dot{\varphi} = 2R \cdot 4\pi t = 8R\pi t \ \left[\frac{cm}{s}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, ona iznosi

$$v_p = 4R\pi \left[\frac{cm}{s}\right].$$

Apsolutna brzina tačke M (*sl.4.3.a*) je,

$$v_M = v_p - v_r, \text{ odnosno}$$

$$\boldsymbol{v_M = 2R\pi} \left[\frac{\boldsymbol{cm}}{\boldsymbol{s}}\right].$$

Relativno ubrzanje tačke M:

- Tangentna komponenta:

$$a_{rT} = \frac{dv_r}{dt} = 4R\pi \quad \left[\frac{cm}{s^2}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, ona iznosi

$$a_{rT} = 4R\pi \left[\frac{cm}{s^2}\right].$$

- Normalna komponenta:

$$a_{rN} = \frac{v_r{}^2}{R} = \frac{16R^2\pi^2t^2}{R} = 16R\pi^2t^2 \quad \left[\frac{cm}{s^2}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, ona iznosi

$$a_{rN} = 4R\pi^2 \left[\frac{cm}{s^2}\right].$$

Prenosno ubrzanje tačke M:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_C + \vec{a}_{pT}^c + \vec{a}_{pN}^c$$

Ubrzanje tačke C je

$$a_C = \overline{CP} \cdot \varepsilon = R \cdot 4\pi$$

$$a_C = 4R\pi \left[\frac{cm}{s^2}\right].$$

- Tangentna komponenta ubrzanja tačke M oko tačke C je

$$a_{pT}^C = \overline{M_1C} \cdot \ddot{\varphi} = R \cdot 4\pi = 4R\pi \left[\frac{cm}{s^2}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, ona iznosi, $a_{PT}^C = 4R\pi \left[\frac{cm}{s^2}\right]$.

- Normalna komponenta ubrzanja tačke M oko tačke C je

$$a_{pN}^{C} = \overline{M_1C} \cdot \dot{\varphi}^2 = R \cdot 16\pi^2 t^2 = 16R\pi^2 t^2 \ \left[\frac{cm}{s^2}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, ona iznosi, $a_{pN}^{C} = 4R\pi^2 \left[\frac{cm}{s^2}\right]$

Koriolisovo ubrzanje je, $\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r$

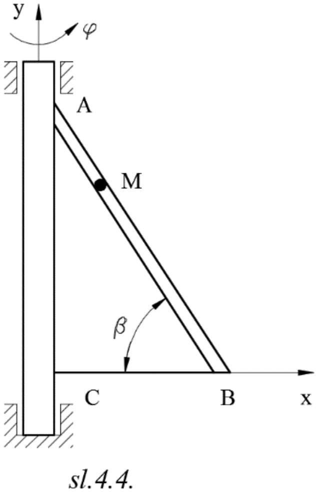
$$a_{cor} = 2\dot{\varphi} \cdot v_r \cdot \sin\left(\vec{\omega}_p, \vec{v}_r\right) = 2 \cdot 2\pi \cdot 2R\pi \cdot \sin 90^0 = 8R\pi^2 \ \left[\frac{cm}{s^2}\right].$$

Apsolutno ubrzanje tačke M:

$a_M = \sqrt{(a_{PT}^{C} + a_C - a_{rT})^2 + \left(a_{cor} - a_{rN} - a_{pN}^{C}\right)^2}$, odnosno

$$\boldsymbol{a_M} = 4R\pi \ \left[\frac{\boldsymbol{cm}}{\boldsymbol{s^2}}\right].$$

Zadatak 4.4. Trougaona ploča ABC, površine 0,625 m^2 i dužine stranice $\overline{CB} = 1\ [m]$, obrće se oko svoje stranice AC po zakonu $\varphi = 2\pi t^2\ [rad]$, gdje se vrijeme t mjeri u sekundama. Istovremeno se duž stranice AB kreće materijalna tačka M po zakonu $\overline{AM} = 3{,}2t^2\ [m]$ (*sl.4.4*).



sl.4.4.

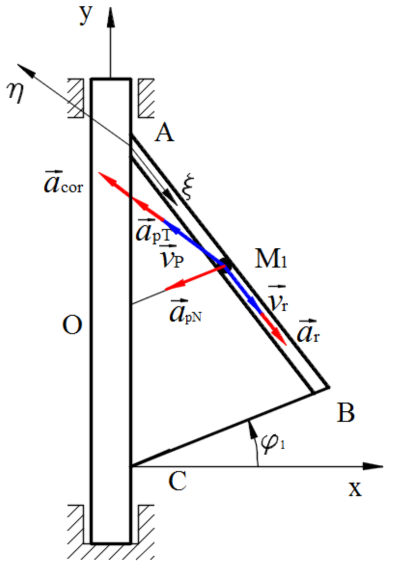
Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje tačke *M* u trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$.

Rješenje:

Kretanje tačke M duž stranice AB predstavlja relativno kretanje, dok je prenosno kretanje obrtanje trougaone ploče ABC oko vertikalne ose O_y.

Položaj trougaone ploče ABC u trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$ je $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}\ [rad]$.

Položaj materijalne tačke M u trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$ je $\overline{AM_1} = 0{,}8\ [m]$.



sl.4.4.a

Relativna brzina tačke M, predstavlja prvi izvod po vremenu zakona kretanja materijalne tačke $\overline{CM}$:

$$v_r = \frac{d}{dt}(\overline{AM}) = 6{,}4t\ \left[\frac{m}{s}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, ona iznosi

$$v_r = 3{,}2\ \left[\frac{m}{s}\right].$$

Prenosna brzina tačke M:

$$v_p = \overline{OM_1} \cdot \dot{\varphi} = \frac{a}{2} 2\pi t\ \left[\frac{m}{s}\right]$$

Na osnovu date površine trougla $P = 0{,}625\ [m^2]$ dobijamo:

$P = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{AC}}{2}$, odnosno

$$\overline{AC} = \frac{2P}{\overline{\overline{CB}}} = \frac{2 \cdot 0{,}625}{1} = 1{,}25\ [m]$$

Rastojanje tačke M_1 od ose obrtanja (duž $\overline{OM_1}$) dobijamo na osnovu sličnosti trouglova ABC i AM_1O, kao

$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AM_1} : \overline{OM_1}$

$$\overline{OM_1} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AM_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AM_1}}{\sqrt{\overline{CB}^2 + \overline{AC}^2}} = \frac{1 \cdot 0{,}8}{\sqrt{1^2 + 1{,}25^2}}$$

$$\overline{OM_1} = 0{,}5\ [m]$$

Intenzitet prenosne brzine je:

$$v_p = 0{,}5 \cdot 4\pi t = 2\pi t\ \left[\frac{m}{s}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, ona iznosi

$$v_p = \pi \left[\frac{m}{s}\right].$$

Apsolutna brzina tačke M:

$v_M = \sqrt{{v_r}^2 + {v_p}^2}$, odnosno

$$\boldsymbol{v_M = 4{,}47}\ \left[\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}\right].$$

Relativno ubrzanje tačke *M*, izračunava se kao drugi izvod po vremenu zakona kretanja $\overline{AM}$:

$$a_r = \frac{d^2}{dt^2}(\overline{AM}) = \frac{dv_r}{dt} = 6{,}4\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}[s]$, ono iznosi

$$a_r = 6{,}4 \ \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Prenosno tangentno ubrzanje je,

$$a_{pT} = \overline{OM_1} \cdot \ddot{\varphi} = 0{,}5 \cdot 4\pi = 2\pi \ \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}\,[s]$, ono iznosi

$$a_{pT} = 2\pi \ \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Prenosno normalno ubrzanje je,

$$a_{pN} = \overline{OM_1} \cdot \dot{\varphi}^2 = 0{,}5 \cdot 16\pi^2 t^2 \ \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

U trenutku $t_1 = \frac{1}{2}\,[s]$, ono iznosi

$$a_{pN} = 2\pi^2 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Sa slike (*sl.4.4.*), slijedi da je, $\cos\beta = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{1{,}6} = 0{,}625$, odnosno

$$\beta = 51{,}32^0$$

Koriolisovo ubrzanje tačke je,

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r$$

$$a_{cor} = 2\dot{\varphi}_1 \cdot v_r \cdot \sin\left(\vec{\omega}_p, \vec{v}_r\right) = 2 \cdot 2\pi \cdot 3{,}2 \cdot \sin 141{,}32^0$$

$$a_{cor} = 8{,}1\pi \ \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Pa je apsolutno ubrzanje tačke M,

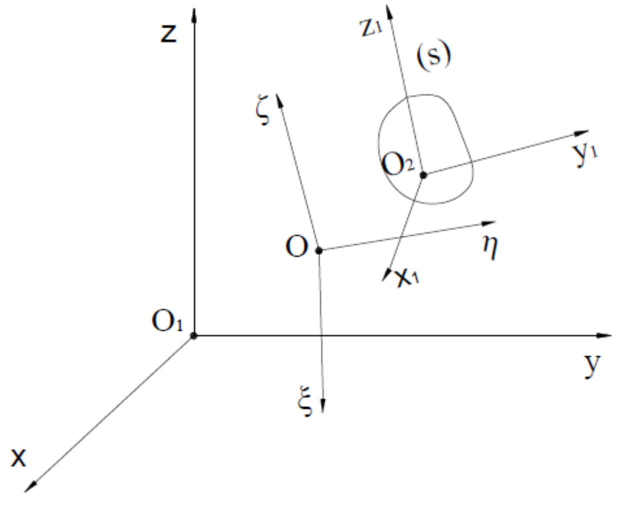
$$a_M = \sqrt{\left(a_{r1} - a_{pN}\cos 51{,}32\right)^2 + \left(a_{pT} + a_{cor}\right)^2} = \sqrt{(6{,}4 - 7{,}7)^2 + (6{,}24 + 25{,}43)^2}$$

$$\boldsymbol{a_M = 31{,}69 \ \left[\frac{m}{s^2}\right]}.$$

5. SLOŽENO KRETANJE KRUTOG TIJELA

Kretanje krutog tijela koje se sastoji iz više osnovnih komponentnih kretanja naziva se složeno kretanje. Proučavanje složenog kretanja tijela vrši se tako što se polazi od toga da su poznata komponentna kretanja a potrebno je naći rezultujuće, odnosno apsolutno kretanje. Takođe iz dosadašnjih izlaganja, proizoljno kretanje krutog tijela u odnosu na nepokretni koordinatni sistem određujemo tako što vežemo pokretni koordinatni sistem čvrsto za tijelo i posmatramo kretanje pokretnog u odnosu na nepokretni sistem. Za razliku od proučavanja složenog kretanja tačke ovdje je potrebno usvojiti i pokretni koordinatni sistem koji čvrsto vežemo za tijelo. U tom cilju, za proučavanje složenog kretanja krutog tijela, uočimo sledeće koordinatne sisteme (*sl.69.*):

- O_{1xyz} - nepokretni Dekartov koordinatni sistem, u odnosu na kog određujemo apsloutno kretanje krutog tijela
- $O_{\xi\eta\zeta}$ - pokretni Dekartov koordinatni sistem, u odnosu na kog određujemo relativno kretanje krutog tijela
- $O_{2x_1y_1z_1}$ - pokretni Dekartov koordinatni sistem, koji je čvrsto vezan za tijelo (S)



sl.69.

Kretanje tijela, odnosno koordinatnog sistema $O_{2x_1y_1z_1}$ koji je čvrsto vezan za tijelo, u odnosu na nepokretni koordinatni sistem O_{1xyz} naziva se *apsolutno kretanje*.

Kretanje tijela, odnosno pokretnog koordinatnog sistema čvrsto vezanog za tijelo $O_{2x_1y_1z_1}$, u odnosu na pokretni koordinatni sistem $O_{\xi\eta\zeta}$, naziva se *relativno kretanje*.

Kretanje tijela, odnosno pokretnog koordinatnog sistema $O_{\xi\eta\zeta}$, u odnosu na nepokretni koordinatni sistem O_{1xyz}, naziva se *prenosno kretanje*.

Proučavanje složenog kretanja krutog tijela, sastoji se u sledećem: ako je zadato relativno i prenosno kretanje tijela, potrebno je odrediti apsolutno kretanje tijela. Prilikom određivanja kinematčkih karakteristika krutog tijela pri njegovom složenom kretanju ograničićemo se na odrđivanje brzina tačaka krutog tijela u datom trenutku vremena.

5.1. SLAGANJE TRANSLATORNIH KRETANJA TIJELA

Posmatrajmo kruto tijelo koje se kreće translatornom brzinom $\overrightarrow{v_1}$ u odnosu na pokretni sistem referencije $O_{\xi\eta\zeta}$, koji se takođe kreće translatornom brzinom $\overrightarrow{v_2}$ u odnosu na nepokretni sistem referencije O_1xyz (*sl.70.*). Prema tome, u odnosu na nepokretni sistem O_1xyz, tijelo vrši složeno kretanje i potrebno je odrediti apsolutno kretanje tijela. U ovom slučaju, pošto se radi o translatornom relativnom i translatornom prenosnom kretanju tijela, slijedi da je:

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_1}$$

$$\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{v_2}$$

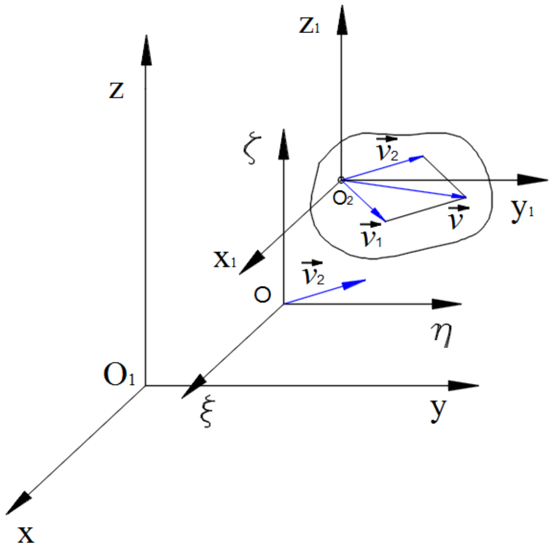
Problem slaganja translatornih kretanja krutog tijela, svodi se na određivanje apsolutne brzine tačke kada su poznate prenosna i relativna brzina tačke, pa je vektor apsolutne brzine tijela jednak

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \tag{5.1}$$

Dakle, *ako tijelo učestvuje istovremeno u dva translatorna kretanja, relativnim i prenosnim, apsolutna brzina tijela vednaka je vektorskom (geometrijskom) zbiru komponentnih brzina.*

U slučaju da tijelo vrši *n* translatornih kretanja, sa vektorima brzina $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$, apsolutno kretanje tijela je takođe translatorno sa vektorom brzine koja je jednaka vektorskom zbiru komponentnih brzina:

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \ldots + \overrightarrow{v_n} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{v_i} \tag{5.2}$$



sl.70.

5.2. SLAGANJE OBRTANJA TIJELA OKO OSA KOJE SE SIJEKU

Posmatrajmo kruto tijelo koje se obrće oko ose O_ζ ugaonom brzinom $\overrightarrow{\omega_1}$ i zajedno sa osom O_ζ obrće se ugaonom brzinom $\overrightarrow{\omega_2}$ ako nepokretne ose *Oz* koja siječe osu *Oz* u tački *O* (*sl.71*). Tijelo u ovom slučaju vrši složeno obrtanje, pri tome obrtanje tijela oko ose O_ζ biće relativno obrtanje, dok je obrtanje tijela zajedno sa osom O_ζ oko ose *Oz* prenosno obrtanje. Sobzirom da se ose oko kojih se tijelo obrće sijeku u tački *O*, složeno kretanje tijela u ovom slučaju ekvivalentno je obrtanju krutog tijela oko nepokretne tačke *O*. Kada nad vektorima ugaonih brzina $\overrightarrow{\omega_1}$ i $\overrightarrow{\omega_2}$ konstruišemo paralelogram, dijagonala paralelograma jeste apsolutna ugaona brzina $\vec{\omega}$ tijela, u čijem pravcu je i trenutna obrtna osa tijela. Da bismo dokazali da je trenutna osa *OP* složenog kretanja tijela, određena dijagonalom paralelograma konstruisanog nad vektorima $\overrightarrow{\omega_1}$ i $\overrightarrow{\omega_2}$, izračunaćemo brzinu tačke *A* tijela. Pošto tačka *A* pripada tijelu, ona jednovremeno u dva obrtna kretanja: oko osa O_ζ i *Oz*, tj. apsolutna brzina tačke *A* jednaka je vektorskom zbiru relativne i prenosne brzine i određena je saglasno Ojlerovoj formuli izrazom:

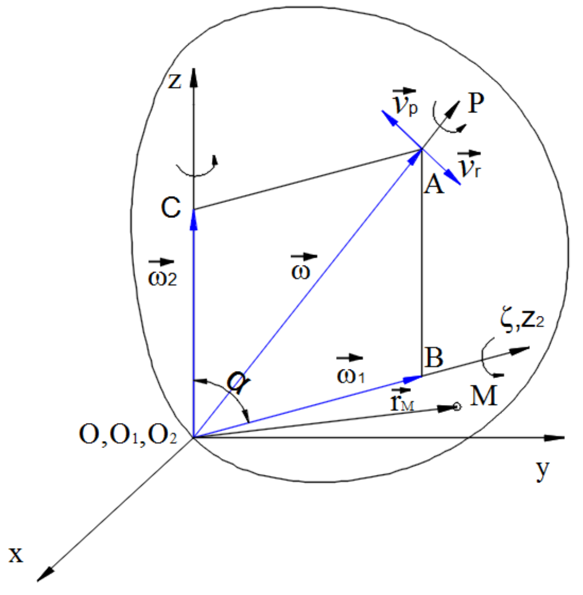
$$\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{\omega_2} \times \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_p} \tag{5.3}$$

Inenzitet relativne brzine jednak je dvostrukoj površini trougla *OBA*, tj.

$$|\overrightarrow{v_r}| = |\overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{OA}| = 2P_{\Delta OBA},$$

A intenzitet prenosne brzine jednak je dvostrukoj površini trouglova Δ*OAC:*

$$|\overrightarrow{v_p}| = |\overrightarrow{\omega_2} \times \overrightarrow{OA}| = 2P_{\Delta OAC},$$



sl.71.

Pošto su površine trouglova Δ*OAB* i Δ*OAC* jednake među sobom (*sl.71*), slijedi da je $\overrightarrow{v_r} = -\overrightarrow{v_p}$ pa je i brzina tačke *A* u datom trenutku vremena jednaka nuli. Prema tome, u datom trenutku pravac *OA* ujedno i pravac trenutne obrtne ose *OP* tijela koje vrši složeno obrtanje.

Dokazaćemo sada da je vektorski zbir ugaonih brzina $\overrightarrow{\omega_1}$ i $\overrightarrow{\omega_2}$ ustvari apsolutna ugaona brzina obrtanja tijela. U tom cilju, odredićemo brzinu proizvoljne tačke *M* tijela, koja je određena vektorom položaja $\overrightarrow{r_M}$:

$$\overrightarrow{v_M} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{r_M} + \overrightarrow{\omega_2} \times \overrightarrow{r_M} \tag{5.4}$$

Apsolutnu brzina tačke *M* možemo odrediti kao brzinu pri obrtanju tijela oko trenutne obrtne ose *OP*, kao

$$\overrightarrow{v_M} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_M} \tag{5.5}$$

Na osnovu predhodnog, slijedi da je

$$\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{r_M} + \overrightarrow{\omega_2} \times \overrightarrow{r_M}$$

Odnosno, tada je $(\vec{\omega} - \overrightarrow{\omega_1} - \overrightarrow{\omega_2}) \times \overrightarrow{r_M} = 0$.

Ova jednačina je zadovoljena, sobzirom da je vektor položaja $\overrightarrow{r_M}$ potpuno proizvoljan, pa slijedi da je,

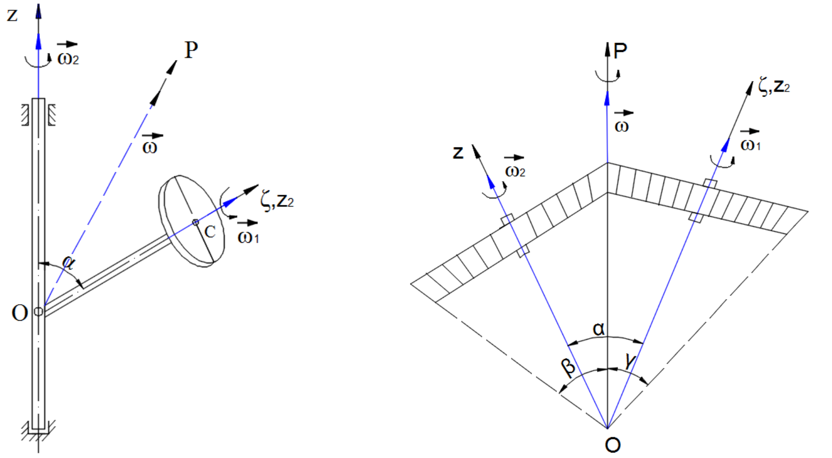
$$\vec{\omega} - \overrightarrow{\omega_1} - \overrightarrow{\omega_2} = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = \overrightarrow{\omega_1} + \overrightarrow{\omega_2} \tag{5.6}$$

Dakle, *ako tijelo istovremeno vrši obrtanje oko dvije ose koje se sijeku, tada je apsolutno kretanje tijela obrtanje oko trenutne ose koja prolazi kroz tačku presjeka osa i koja je u pravcu dijagonale paralelograma konstruisanog nad komponentnim ugaonim brzinama kao stranicama, ugaonom brzinom koja je jednaka vektorskom zbiru komponentnih ugaonih brzina*.

Ako se kruto tijelo istovremeno obrće oko *n* trenutnih osa koje se sijeku u jednoj tački, onda je ugaona brzina apsolutnog obrtanja tijela jednaka vektorskom zbiru komponentnih ugaonih brzina oko tih pojedinih osa, odnosno,

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{\omega_1} + \overrightarrow{\omega_2} + \ldots + \overrightarrow{\omega_n} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\omega_\iota} \tag{5.7}$$

Iz predhodnog, slijedi da je vektor ugaone brzine vektor vezan za obrtnu osu. Primjeri obrtanja tijela oko osa koje se sijeku prikazani su na slici (*sl.72.*).



a) *b)*

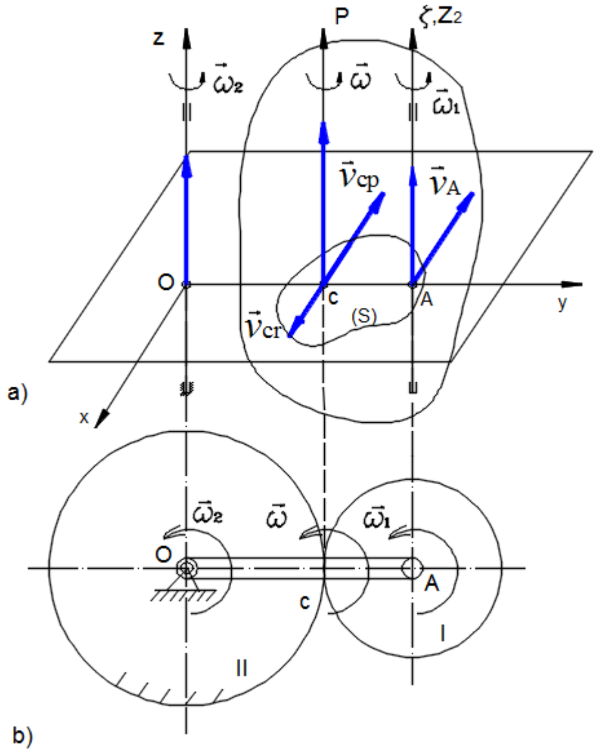
sl.72.

5.3. SLAGANJE OBRTANJA TIJELA OKO PARALELNIH OSA

Neka tijelo vrši složeno kretanje koje se u posmatranom trenutku sastoji od istovremenih obrtanja oko međusobno paralelnih osa. U tom slučaju sve tačke tijela kreću se u ravnima koje su pralelne jednoj nepokretnoj ravni, tj. tijelo vrši ravno kretanje. Zbog toga umjesto kretanja tijela može se posmatrati kretanje ravne figura (*S)* koja je upravna na ose obrtanja.

5.3.1. Obrtanje tijela oko paralelnih osa ugaonim brzinama istog smjera

Posmatrajmo tijelo koje se obrće oko ose A_ζ ugaonom brzinom $\overrightarrow{\omega_1}$ i zajedno sa osom A_ζ obrće se oko druge nepokretne ose O_z ugaonom brzinom $\overrightarrow{\omega_2}$. Pri tome su obrtne ose A_ζ i O_z paralelne, a obrtanja tijela vrše se u istom smjeru (*sl.73.a*). Model ovakvog obrtanja krutog tijela prikazan je na slici (*sl.73.b)*, gdje se zupčanik *I* pomoću krivaje OA obrće oko ose koja prolazi kroz tačku O i oko paralelne ose koja prolazi kroz tačku *A*, kotrljajući se po nepokretnom zupčaniku *II*.



sl.73.

Obrtanje tela oko ose A_ζ jeste relativno kretanje tijela, a obrtanje oko ose O_z jeste prenosno kretanje tijela. Tačke tijela pri ovakvom složenom obrtanju tijela, kreću se u ravnima normalnim na ose A_ζ i O_z, pa je ovo složeno kretanje tijela poseban slučaj ravnog kretanja tijela i zbog toga je dovoljno proučiti kretanje ravne figure (S) tijela (*sl.73*). Apsolutna brzina tačke C u datom trenutku vremena jednaka je nuli, odnosno jednake su nuli i brzine svih tačaka koje leže na pravoj CP koja je paralelna obrtnim osama A_ζ i O_z. Prema tome, u ovom slučaju prava CP predstavlja trenutnu obrtnu osu, pri apsolutnom obrtanju krutog tijela.

Apsolutna brzina tačke C je,

$$\overrightarrow{v_c} = \overrightarrow{v_{cr}} + \overrightarrow{v_{cp}} \tag{5.8}$$

pri tome je,

$$v_{cr} = \overline{AC} \cdot \omega_1; \; v_{cp} = \overline{OC} \cdot \omega_2$$

a vektori brzina $\overrightarrow{v_{cr}}$ i $\overrightarrow{v_{cp}}$ su istog pravca a suprotnog smijera (*sl.73*). Sobzirom da je $\overrightarrow{v_c} = \overrightarrow{v_{cr}} + \overrightarrow{v_{cp}} = 0$, slijedi da je

$$\overline{AC} \cdot \omega_1 = \overline{OC} \cdot \omega_{2,}$$

odnosno,

$$\frac{\omega_1}{\overline{OC}} = \frac{\omega_2}{\overline{AC}} \tag{5.9}$$

Intenzitet trenutne ugaone brzine $|\vec{\omega}| = \omega$, pri složenom kretanju krutog tijela, odredićemo na taj način što ćemo odediti apsolutnu brzinu tačke *A* kao brzinu usled obrtanja tijela oko osa A_ζ i O_z,

$$v_A = 0 \cdot \omega_1 + \overline{OA} \cdot \omega_2 = \overline{OA} \cdot \omega_2 \tag{5.10}$$

Brzinu usled apsolutnog obrtanja tijela, oko trenutne ose *CP*, možemo izraziti kao

$$v_A = \overline{AC} \cdot \omega \tag{5.11}$$

pa je,

$$\omega = \frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} \cdot \omega_2 = \frac{\overline{AC} + \overline{OC}}{\overline{AC}} \omega_2 = \left(1 + \frac{\overline{OC}}{\overline{AC}}\right) \omega_2$$

odnosno, dobijamo da je

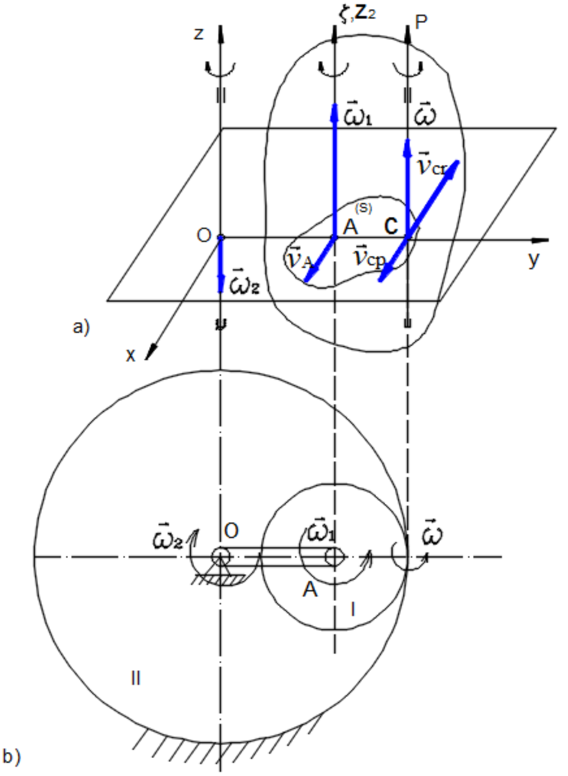
$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \tag{5.12}$$

Na bazi predhodnog, slijedi: *Kada tijelo učestvuje istovremeno u dva obrtanja oko paralelnih osa, koje su usmjerene u istu stranu, onda će apsolutno kretanje tijela biti trenutno obrtanje ugaonom brzinom $\omega = \omega_1 + \omega_2$, koja se vrši u istom smjeru oko ose CP*. Trenutna osa rotacije *CP* je paralelna obrtnim osama A_ζ i O_z a njen položaj je određen relacijom:

$$\frac{\omega_1}{\overline{OC}} = \frac{\omega_2}{\overline{AC}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\overline{AC} + \overline{OC}} = \frac{\omega}{\overline{OA}} \qquad 5.13)$$

5.3.2. Obrtanje tijela oko paralelnih osa ugaonim brzinama suprotnog smjera

Posmatrajmo tijelo koje se obrće ugaonom brzinom $\overrightarrow{\omega_1}$ oko ose A_ζ i zajedno sa osom A_ζ obrće se ugaonom $\overrightarrow{\omega_2}$ oko nepokretne ose Oz, pri tome je $\omega_1 > \omega_2$ (*sl.74.a*).



sl.74.

Model ovakvog obrtanja krutog tijela prikazan je na slici (*sl.74.b)*. Postupajući na isti način kao u poglavlju 5.3.1., tačka *C* predstavlja trenutni pol rotacije zupčanika I, odnosno osa *CP* je trenutna osa rotacije, pa je brzina tačke *C* jednaka nuli.

Inenziteti brzine tačke C, usled relativnog i prenosnog obrtanja, određeni su izrazima:

$$v_{cr} = \overline{AC} \cdot \omega_1$$

$$v_{cp} = \overline{OC} \cdot \omega_2$$

Kako je $\overrightarrow{v_c} = \overrightarrow{v_{cr}} + \overrightarrow{v_{cp}}$=0,

slijedi da je,

$$\overline{AC} \cdot \omega_1 = \overline{OC} \cdot \omega_2$$

odnosno,

$$\frac{\omega_1}{\overline{\overline{OC}}} = \frac{\omega_2}{\overline{\overline{AC}}}$$

Intenzitet trenutne ugaone brzine, odredićemo izračunavanjem inenziteta brzine tačke A (*sl.74*), kao

$$v_A = \overline{OA} \cdot \omega_2 + 0 \cdot \omega_1 = \overline{OA} \cdot \omega_2,$$

Odnosno, brzinu v_A možemo odrediti i kao,

$$v_A = \overline{AC} \cdot \omega$$

Sledi da je,

$$\omega = \frac{\overline{OA}}{\overline{\overline{AC}}} \cdot \omega_2 = \frac{\overline{OC} - \overline{AC}}{\overline{\overline{AC}}} \omega_2 = \left(\frac{\overline{OC}}{\overline{\overline{AC}}} - 1 \right) \omega_2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 \right) \omega_2$$

odnosno,

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \tag{5.14}$$

Na bazi predhodnog, možemo reći: *Ako tijelo učestvuje istovremeno u dva obrtanja oko paralelnih osa ugaonim brzinama različitih intenziteta i različitih smjerova, onda je apsolutno kretanje tijela trenutno obrtanje ugaonom brzinom* $\omega = \omega_1 - \omega_2$ *i vrši se u stranu ugaone brzine većeg* *intenziteta, oko trenutne obrtne ose CP, koja je paralelna datim osama* A_ζ i *Oz i čiji je položaj određen relacijom:*

$$\frac{\omega_1}{\overline{OC}} = \frac{\omega_2}{\overline{AC}} = \frac{\omega}{\overline{OA}} \tag{5.15}$$

5.3.3. Kinematički spreg

Obrtanje tijela oko dvije paralelne ose u suprotnim smjerovima, ugaonim brzinama jednakih intenziteta, naziva se kinematički spreg.

Posmatrajmo tijelo koje se obrće ugaonom brzinom $\overrightarrow{\omega_1}$ oko ose A_ζ i zajedno sa osom A_ζ obrće se ugaonom brzinom $\overrightarrow{\omega_2}$ oko ose *Bz*, pri tome se obrtanja vrše u suprotnim smjerovima, a ugaone brzine su istih intenziteta, tj. $|\overrightarrow{\omega_1}| = |\overrightarrow{\omega_2}|$ (*sl.75.*). Trenutna ugaona brzina $\vec{\omega}$ apsolutnog kretanja tijela u ovom slučaju jednaka je nuli. Prema zakonima ravnog kretanja, figura (*S*) u ovom slučaju vrši translatorno kretanje i vektori brzina svih tačaka figure jednaki su među sobom.

Posmatrajmo proizvoljnu tačku *M* ravne figure (*S*), čiji je položaj određen vektorima $\overrightarrow{r_1}$ i $\overrightarrow{r_2}$ mjerenih od tačaka *A* i *B* (*sl.75*). Apsolutna brzina tačke *M* određena je izrazom:

$$\overrightarrow{v_M} = \overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{\omega_2} \times \overrightarrow{r_2} \tag{5.16}$$

S obzirom da je $\overrightarrow{\omega_2} = -\overrightarrow{\omega_1}\ i\ \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{AB},$ odnosno $\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{AB},$ to se izraz za brzinu tačke *M* svodi na oblik:

$$\overrightarrow{v_M} = \vec{v} = \overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{r_1} + \left[-\overrightarrow{\omega_1} \times (\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{AB})\right]$$

odnosno,

$$\overrightarrow{v_M} = \overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{AB} \tag{5.17}$$

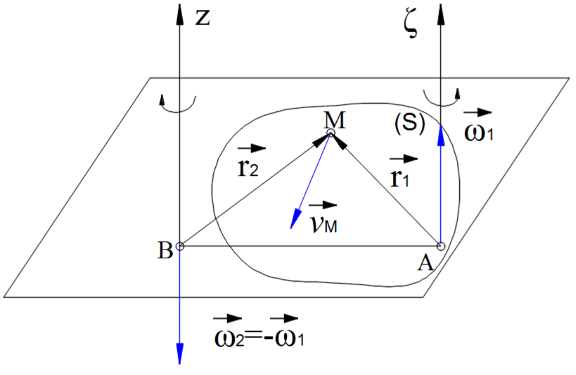
Prema tome, apsolutna brzina tačke *M* u ovom slučaju ne zavisi od položaja te tačke, pa su vektori brzina svih tačaka ravne figure (*S*) u datom trenutku vremena jednaki među sobom.

Vektor brzine $\vec{v}$ tačke tijela upravan je na ravan vektora $\overrightarrow{\omega_1}$ i $\overrightarrow{AB}$ tj. na ravan u kojoj leže vektori $\overrightarrow{\omega_1}\ i\ \overrightarrow{\omega_2}$, a inenzitet brzine tačke tijela jednak je:

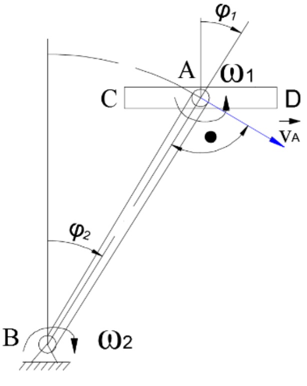
$$v = \omega_1 \overline{AB}\ sin90° = \overline{AB} \cdot \omega_1 = h\omega_1 \tag{5.18}$$

Normalno rastojanje h, između vektora $\overrightarrow{\omega_1}\ i\ \overrightarrow{\omega_2}$, naziva se *krak kinematičkog sprega.*

Prema tome, *kada tijelo izvodi obratanje oko paralelnih osa ugaonim brzinama istih inenziteta a suprotnih smjerova* $\overrightarrow{\omega_2} = -\overrightarrow{\omega_1}$, *rezultujuće kretanje je translatorno kretanje tijela i vektor brzine* $\vec{v}$ *tijela predstavlja moment kinematičkog sprega, koji obrazuju vektori* $\overrightarrow{\omega_1}$ *i* $\overrightarrow{\omega_2}$. *Ovo može biti napisano i kao* $(\overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{\omega_2}) \sim \vec{v}$ *, odnosno može se kazati da je, u kinematičkom smislu, kinematički spreg ekvivalentan translatornom kretanju.*



sl. 75.



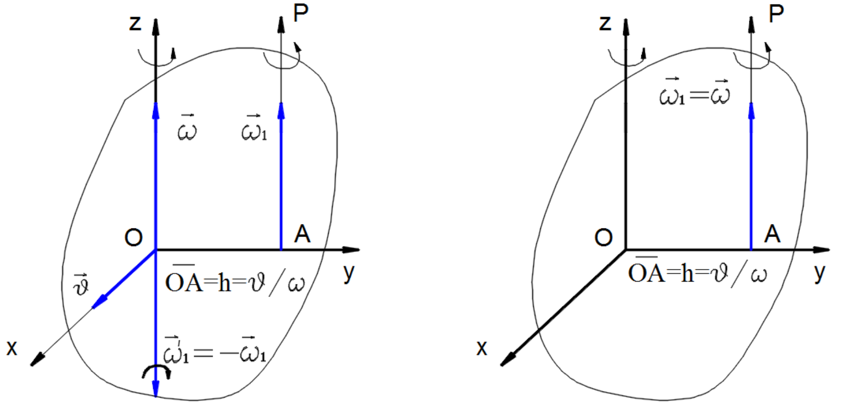
sl.76.

Primjer kinematičkog sprega predstavlja translatorno kretanje pedale *CD* u odnosu na ram bicikla (*sl.76.*). Translatorno kretanje pedale jeste rezultat obrtanja pedale oko paralelnih osa koje prolaze kroz tačke *A* i *B* ugaonim brzinama $\overrightarrow{\omega_2} = -\overrightarrow{\omega_1}$.

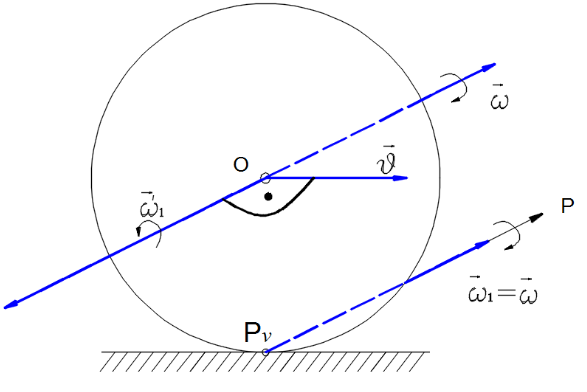
5.4. SLAGANJE TRANSLATORNOG I OBRTNOG KRETANJA TIJELA

5.4.1 Brzina translatornog kretanja upravna je na osu obrtanja

Posmatrajmo tijelo koje vrši složeno kretanje, tako što učestvuje jednovremeno u translatornom kretanju brzinom $\vec{v}$ i obrtanju ugaonom brzinom $\vec{\omega}$ oko ose koja je upravna na vektor brzine (*sl.77a*).



sl. 77.



Sl. 78.

Da bi smo odredili apsolutno kretanje tijela, translatorno kretanje tijela koje se vrši vektorom brzine $\vec{v}$ zamijenićemo kinematičkom spregom

$(\overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{\omega_1}')$, jer je spreg obrtanja ekvivalntan translatornom kretanju tijela, što možemo napisati kao

$$(\overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{\omega_1}') \sim v.$$

Izabraćemo kinematički spreg takav da bude $\overrightarrow{\omega_1} = \vec{\omega}$, a sobzirom da je ravan kinematičkog sprega $(\overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{\omega_1}')$, upravna na vektoru $\vec{v}$, to se obrtanja $\vec{\omega}$ i $\overrightarrow{\omega_1}'$ poništavaju i rezultat ovog slaganja jeste obrtanje krutog tijela oko trenutne ose *AP* ugaonom brzinom $\overrightarrow{\omega_1} = \vec{\omega}$, koja je udaljena od ose O_z za rastojanje kraka sprega $h = \frac{v}{\omega}$ (*sl.77b*).

Na osnovu ovoga slijedi: *Ako tijelo učestvuje jednovremeno u dva kretanja translatornom brzinom $\vec{v}$ i obrtnom kretanju ugaonom brzinom $\vec{\omega}$ i ako je vektor ugaone brzine $\vec{\omega}$ upravan na vektoru brzine $\vec{v}$, apsolutno kretanje tijela jeste obrtno kretanje oko ose AP ugaonom brzinom $\overrightarrow{\omega_1}$. Pri tome je smjer obrtanja jednak smjeru ugaone brzine $\vec{\omega}$, samo je obrtna osa AP pomjerena za krak h = $\frac{v}{\omega}$ u odnosu na osu O_z.*

Složeno kretanje tijela u ovom slučaju jeste ravno kretanje i ono se može zamjeniti obrtanjem oko ose koja prolazi kroz trenutni pol *Pv* brzinom kao što je na prikazano na (*sl.78.*).

5.4.2. Brzina translatornog kretanja paralelna je osi obratanja

Složeno kretanje tijela kod koga je vektor ugaone brzine $\vec{\omega}$ u posmatranom trenutku paralelan sa brzinom translatornog kretanja $\vec{v}$ naziva se *zavojno kretanje.*

Posmatrajmo tijelo koje učestvuje jednovremeno u dva kretanja, obrće se konstantnom ugaonom brzinom $\vec{\omega}$ oko ose *Oz* i translatorno se pomjera duž te ose brzinom konstantnog intenziteta $\vec{v}$. Tijelo u ovom slučaju vrši složeno kretanje i naziva se kinematički zavrtanj. (*sl.79.a*).

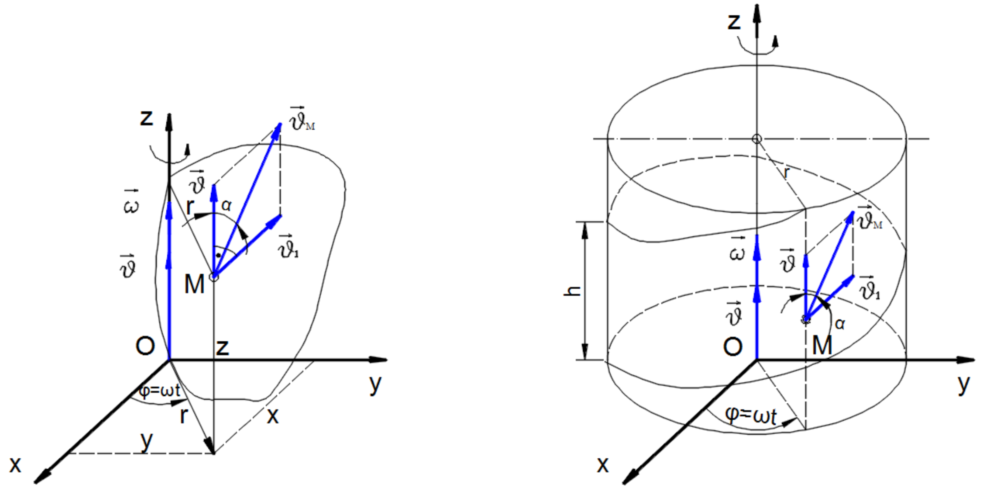
Posmatrajmo slučaj kada su vektori $\vec{v}$ i $\vec{\omega}$ usmjereni u istu stranu i uočimo proizvoljnu tačku *M* tijela, čije su koordinate određene izrazima:

$$x = r\cos\omega t$$

$$y = r\sin\omega t \tag{5.19}$$

$$z = vt$$

Kada se tijelo obrne za ugao $\varphi = \omega t$, ono istovremeno pređe put $z = vt$ duž ose *Oz*, a tačka *M* pri tome opiše zavojnu liniju (*sl.79b*). Odnos $\frac{v}{\omega} = p$ naziva se *parameter zavrtnja* i ne zavisi od rastojanja tačke *M* od ose zavrtnja *Oz*, pa slijedi da sve tačke krutog tijela koje vrši zavojno kretanje imaju isti parametar *p*.



sl.79.

<u>Korak zavrtanja</u> *h*, je veličina za koju se duž ose zavrtanja pomjeri tijelo za vreme *T*, koje odgovara jednom punom obrtu tijela, pa je

$$h = vT.$$

Sobzirom da je $T = \frac{2\pi}{\omega}$, može se napisati da je

$$h = \frac{v}{\omega} 2\pi = 2\pi p. \quad (5.20)$$

Apsolutna brzina tačke M tijela, određena je vektorskim zbirom relativne brzine koju ima usled obrtanja tijela oko ose Oz i prenosne brzine usled translatornog kretanja tijela duž ose Oz:

$$\vec{v}_M = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{v_1} + \vec{v} \quad (5.21)$$

gdje je intenzitet brzine proizvoljne tačke M usled obrtanja oko ose O_z jednak,

$$v_1 = r\omega$$

Pošto su vektori brzina upravni među sobom $\overrightarrow{v_1} \perp \vec{v}$ (*sl.79.a*), to je intenzitet vektora apsolutne brzine tačke M, određen sa

$$v_M = \sqrt{v_1^2 + v^2} = \sqrt{(r\omega)^2 + (p\omega)^2} = \omega^2\sqrt{r^2 + p^2} \quad (5.22)$$

a ugao, koji vektor apsolutne brzine gradi sa osom Oz, određuje se relacijom

$$tg\ \alpha = \frac{v_1}{v} = \frac{r}{p} \quad (5.23)$$

Putanja tačke M siječe sve izvodnice pod istim uglom α, jer je p *=const.*. Vektor apsolutne brzine $\overrightarrow{v_M}$ usmjeren je u pravcu tangente na zavojnu liniju koju tačka M opisuje pri složenom kretanju tijela. *(sl.79.b*).

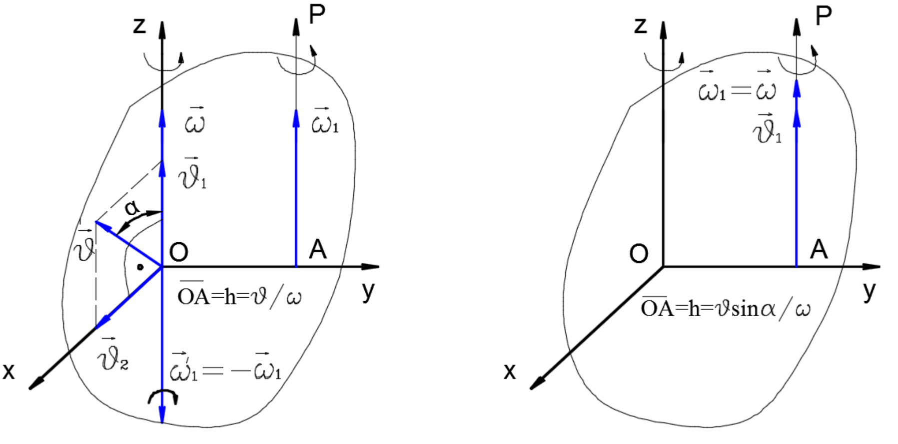
5.4.3. Vektor brzine translatornog kretanja gradi proizvoljni ugao sa obrtnom osom

Posmatrajmo slučaj složenog kretanja tijela kod koga vektor brzine $\vec{v}$ translatornog kretanja u posmatranom trenutku gradi proizvoljan ugao sa vektorom ugaone brzine $\vec{\omega}$ obrtnog kretanja (*sl.80a*). Apsolutno kretanje tijela u ovom slučaju jeste opšte kretanje krutog tijela koje smo već proučili. Da bismo u ovom slučaju odredili apsolutno kretanje tijela, razložićemo vektor brzine $\vec{v}$ u ravni u kojij leže vektori $\vec{v}$ i $\vec{\omega}$ u dvije komponente $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$.

Pri tome je komponenta brzine $\overrightarrow{v_1}$ kolinearna sa vektorom $\vec{\omega}$ a druga komponenta rzine $\overrightarrow{v_2}$ je upravna na vektoru $\vec{\omega}$. Intenziteti ovih komponenti prema slici (*sl.80.*) su:

$$|\vec{v}_1| = v_1 = v\cos\alpha \tag{5.24}$$

$$|\vec{v}_2| = v_2 = v\sin\alpha$$



sl.80.

Vodeći računa da je vektor brzine $\overrightarrow{v_2}$ upravan na vektoru $\vec{\omega}$, kretanje tela, određeno vektorima $\overrightarrow{v_2}$ i $\vec{\omega}$, može se zamjeniti jednim obrtanjem koje se vrši ugaonom brzinom $\overrightarrow{\omega_1} = \vec{\omega}$, koja prolazi kroz tačku *A* a nalazi se na rastojanju *h* od vektora $\vec{\omega}$, određeno izrazom:

$$\overline{OA} = h = \frac{v_2}{\omega} = \frac{\mathrm{v}\sin\alpha}{\omega} \tag{5.25}$$

Pri tome mora biti $\overline{OA} \perp \overrightarrow{v_2}$. S obzirom da je brzina $\overrightarrow{v_1}$ translatornog kretanja krutog tijela slobodan vektor, to se može paralelno prenijeti u tačku *A* i time smo dobili u tački *A* vektori $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{\omega_1}$ kolinearni i takav skup trenutne ugaone brzine $\overrightarrow{\omega_1}$ i translatorne brzine $\vec{v}$ određuje trenutno zavojno kretanje tijela, čiji je parameter određen izrazom:

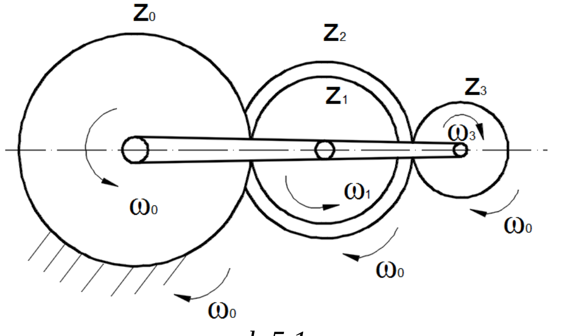
$$p = \frac{v_1}{\omega} = \frac{v}{\omega}\cos\alpha. \tag{5.26}$$

Dakle, *ako tijelo vrši složeno kretanje određeno translatornom brzinom $\vec{v}$ i trenutnom ugaonom brzinom $\vec{\omega}$, pri čemu ovi vektori grade među sobom proizvoljan ugao $\propto$, tada je apsolutno kretanje zavojno kretanje tijela oko trenutne zavojne ose AP, koja se nalazi na rastojanju* $\overline{OA}=\frac{v\ sin\propto}{\omega}$ *od tačke O* (*sl.80*).

Zadaci

<u>Zadatak 5.1</u>. Krivaja *OA* obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω_0 oko ose nepokretnog zupčanika, čiji je broj zubaca z_0=60. Za krivaju su zglobno vezani zupčanici sa brojem zubaca z_1=40; z_2=50 i z_3=25. (*sl.5.1*).

Odrediti ugaonu brzinu ω_3 zupčanika z_3.



sl. 5.1.

Rješenje.

Krivaja *OA* vrši obrtanje oko nepokretne ose, a zupčanici $z_1, z_2\ i\ z_3$ vrše ravno kretanje, dok je zupčanik z_0 nepokretan. Zadatak ćemo riješiti metodom zaustavljanja, tako što ćemo zaustaviti kretanje krivaje *OA*, a njeno kretanje prenijeti na sve članove sistema, pokretne i nepokretne, kao što je na prikazano na slici (*sl.5.1.)*. Primjenjujući kazani metod za rješavanje zadataka sistema tijela koja se obrću oko nepokretnih osa, dobićemo

$$r_0\ \omega_0 = r_1(\omega_1 - \omega_0)$$

$$r_2(\omega_1 - \omega_0) = r_3(\omega_3 + \omega_0),$$

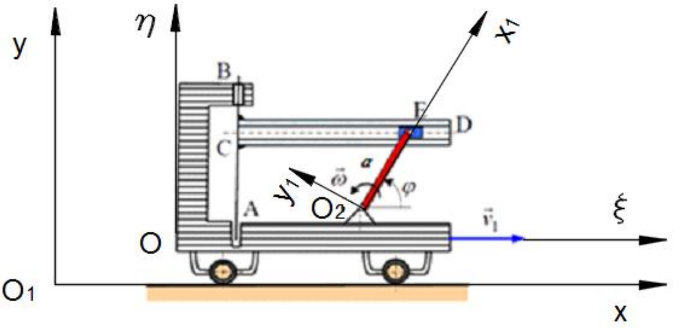
odakle nalazimo da je:

$$\omega_3 = \left(\frac{r_0 \cdot r_2}{r_1 \cdot r_3} - 1\right)\omega_0,$$

odnosno:

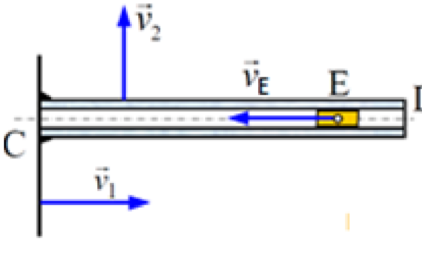
$$\omega_3 = \left(\frac{z_0 \cdot z_2}{z_1 \cdot z_3} - 1\right)\omega_0 = 2\omega_0$$

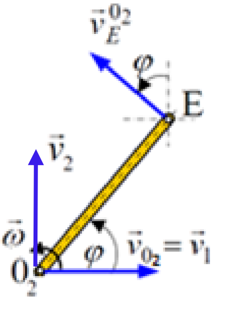
Zadatak 5.2. Na kolicima, koja se kreću translatorno brzinom $\vec{v}_1$, postavljena je takozvana Volfova kulisa. Ona se sastoji od vertikalne osovine *AB* koja se kreće duž vertikalne vođice, zatim vođice *CD* duž koje je kreće klizač E. Poluga $\overline{O_2E}$, dužine a, obrće se konstantnom ugaonom brzinom $\vec{\omega}$ oko ose koja prolazi kroz tačku O_2 (*sl.5.2*). Odrediti apsolutnu brzinu klizača E i vođice (kulise) CD u trenutku kada je ugao $\varphi = \frac{\pi}{6}$.



sl.5.2.

Rješenje:





sl.5.2.a

Vektor brzine klizača E, posmatrana kao tačka poluge $\overline{O_2E}$ je,

$$\vec{v}_E = \vec{v}_{O_2} + \vec{v}_E^{O_2},$$

gdje je, $\vec{v}_{O_2} = \vec{v}_o = \vec{v}_1$.

Sa druge strane, vektor brzine tačke E, kada se posmatra kao tačka koja se slobodno kreće u kulisi, je

$$\vec{v}_E = \vec{v}_p + \vec{v}_r = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_r$$

Ako se izjednače vektori brzina tačke E, dobija se:

$\vec{v}_E = \vec{v}_E$, odnosno

$$\vec{v}_{O_2} + \vec{v}_E^{O_2} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_r$$

Projektovanjem predhodne jednačine na pravac AB slijedi:

$$v_E^{O_2} \cdot \cos\varphi = v_2$$

Za trenutak vremena kada je $\varphi = \frac{\pi}{6}$, komponenta brzine v_2 kulise je:

$$v_2 = \overline{O_2E} \cdot \omega \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vektor brzine kulise *CD* je,

$$\vec{v} = \vec{v}_p = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Pa je, intenzitet brzine kulise *CD*:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{v_1^2 + (\overline{O_2E})^2 \cdot \omega^2 \frac{3}{4}}$$

Vektor brzine klizača E je,

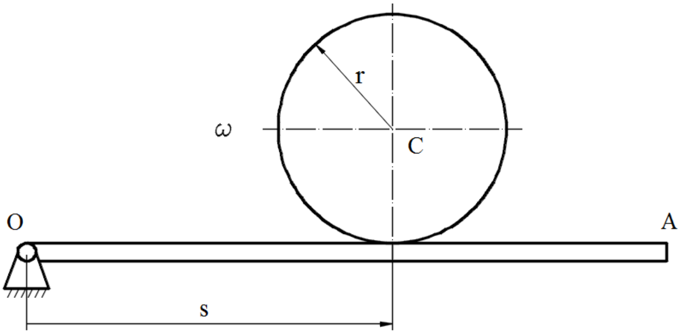
$$\vec{v}_E = \vec{v}_p + \vec{v}_r = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_E^O$$

Pa je intenzitet apsolutne brzine klizača E, određen sa

$$\boldsymbol{v_E} = \sqrt{(\boldsymbol{v_1} - \overline{O_2E}\boldsymbol{\omega}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})^2 + \boldsymbol{v_2^2}} = \sqrt{\boldsymbol{v_1^2} + (\overline{O_2E})^2 \cdot \boldsymbol{\omega^2} - \overline{O_2E}\boldsymbol{\omega v_1}}$$

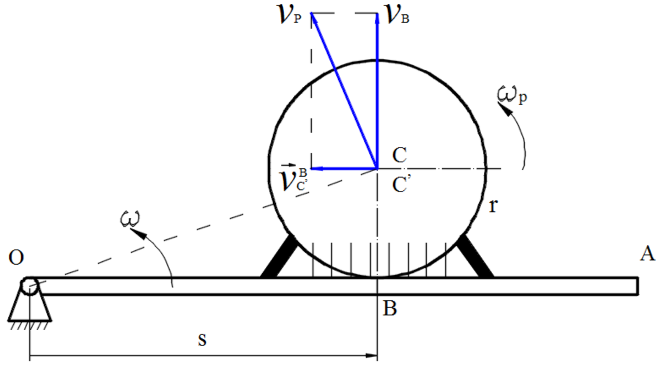
Zadatak 5.3. Štap OA, zglobno je vezan u tački O za podlogu i obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω. Po štapu se kotrlja bez klizanja disk poluprečnika r (*sl.5.3*). Položaj centra diska (tačka C) je definisan rastojanjem s čija je promjena opisana zakonom $s = s_0 + vt$, gdje su $s_0, v = const.$

Odrediti ugaonu brzinu diska i brzinu tačke C u proizvoljnom trenutku vremena.



sl.5.3.

Rješenje:



sl.5.3.a

Disk vrši složeno kretanje, pri čemu je prenosno kretanje obrtanje štapa, a relativno kretanje je kotrljanje diska po štapu. Pri prenosnom kretanju smatramo da je disk kruto vezan (na primjer zavaren) za štap. Njegova ugaona brzina u tom slučaju (a to je prenosna ugaona brzina) jednaka je ugaonoj brzini štapa, pa je:

$$\omega_p = \omega$$

Prenosna brzina tačke C, može se odrediti kao:

$$v_P = \overline{OC} \cdot \omega$$

Budući da ovu brzinu treba sabrati sa relativnom, pogodnije je imati njene projekcije na ose *Ox* i *Oy*. Da bi se one izračunale, uvešće se tačka C' koja se kreće zajedno sa štapom, a koja se u datom trenutku poklapa sa tačkom C. Dakle, tačka C se relativno kreće u odnosu na tačku C' koja miruje u odnosu na štap. Kako tačke B i C' (ali ne i tačka C) pripadaju istom zamišljenom krutom tijelu, važiće:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{C'} = \vec{v}_B + \vec{v}_{C'}^B$$

Pri tome su intenziteti ovih brzina:

$$v_B = s(t)\omega$$

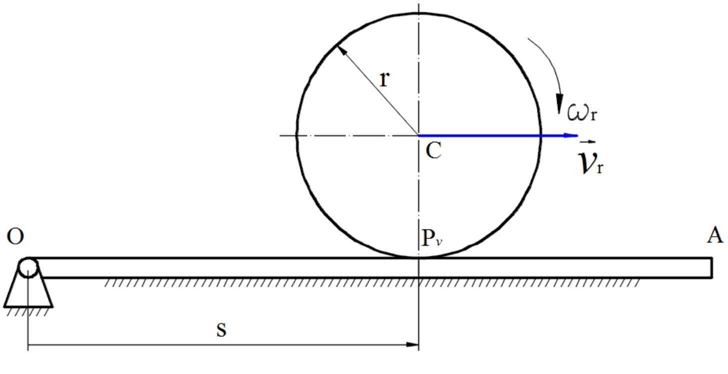
$$v_{C'}^B = r\omega$$

u prikazanim pravcima (brzina tačke B je docrtana u tački C'). Ugaona brzina koju disk ima, ako u mislima zaustavimo štap i dozvolimo kretanje diska po štapu, je relativna ugaona brzina. Kako u tom slučaju relativna brzina tačke C iznosi,

$$v_r = \dot{s} = v,$$

a relativna ugaona brzina je,

$\omega_r = \frac{v_r}{r} = \frac{v}{r}$



sl.5.3.b

Ukupna ugaona brzina diska $\vec{\omega}_d$, dobija se vektorskim sabiranjem prenosne i relativne ugaone brzine, pa je:

$$\vec{\omega}_d = \vec{\omega}_p + \vec{\omega}_r$$

One su istog pravca, a suprotnog smjera, na osnovu čega je:

$$\omega_d = \omega_p - \omega_r = \omega - \frac{v}{r}$$

Apsolutna brzina tačke C se izračunava na osnovu:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_P + \vec{v}_r$$

Projektovanjem ove jednačine na ose x i y dobijamo:

$$v_x = v_r - v_{C'}^{B} = v - r\omega$$

$$v_y = v_B = s(t)\omega = (s_0 + vt\,)\omega$$

pa je intenzitet brzine tačke C

$$\boldsymbol{v_C = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{(v - r\omega)^2 + (s_0 + vt\,)^2\omega^2}}$$

6. ELEMENTI TEORIJE MEHANIZAMA

6.1. OSNOVNI POJMOVI

Mehanizam je svaki sistem tijela čija su kretanja međusobno povezana. Osnovna funkcija mehanizma je prenos sile i kretanja ili vođenje tačke po zadatoj putanji, odnosno tijela kroz zadate položaje. U zavisnosti od toga koja od ovih funkcija dominira, razlikuju se dvije osnovne grupe mehanizama:

a) mehanizmi za prenos i

b) mehanizmi za vođenje.

Mehanizmi za prenos imaju zadatak da silu ili kretanje prenesu od pogona do izvršnog dela mašine ili nekog drugog mehanizma po utvrđenoj prenosnoj funkciji. Prenosna funkcija je zavisnost izlazne koordinate ψ za kružno, odnosno s za pravolinijsko kretanje vodjenog člana, od pogonske koordinate.

Mehanizmi za vođenje imaju zadatak da provedu tačku, odnosno telo, kroz zadate položaje.

Član mehanizma je jedno ili više tijela čvrsto spojenih u jednu cjelinu. ***Kinematički par*** su dva člana mehanizma čija su kretanja u uzajamnoj vezi. Prema vrsti konematičkih parova, mehanizme možemo podijeliti kao što je prikazano na slici (*sl.81*).

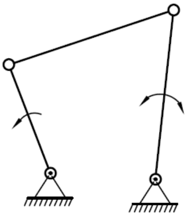
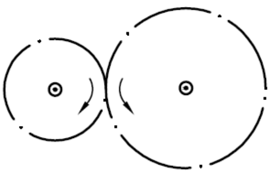
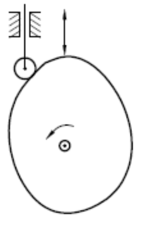
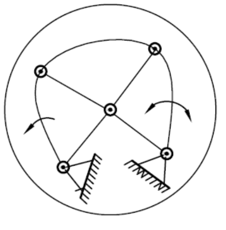
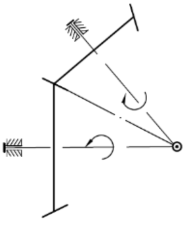
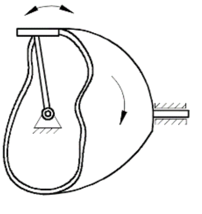
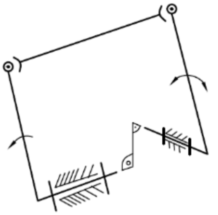
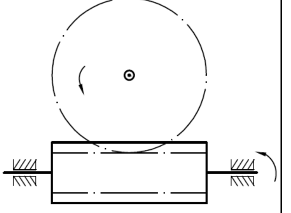
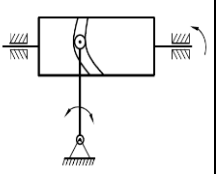
Niži kinematički parovi su oni kod kojih se pojedini članovi dodiruju površinama. Kod njih se kretanje ne mijenja i kada članovi zamjene mjesta (npr. veza štap-klizač).

Viši kinematički parovi su oni kod kojih se dodir ostvaruje u jednoj tački ili liniji. Kod njih ne važi pravilo komutativnosti mjesta članova (frikcioni prenosnici, zubčasti prenosnici,...)

Broj stepeni slobode relativnog kretanja, jednog člana kinematičkog para u odnosu na drugi je <u>pokretljivost,</u> označena sa H, koja je određena sa:

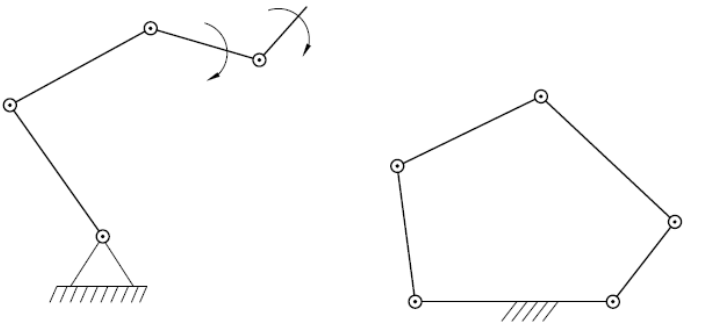
$$H=6-k \tag{6.1}$$

gdje je k – broj veza koje su nametnute kinematičkom paru.

Vrsta mehanizama	Polužni	Kotrljajni (zupčasti)	Bregasti
Ravni mehanizmi			
Sferni mehanizmi			
Prostorni mehanizmi			

sl.81.

Više članova, medjusobno povezanih zglobovima, čine ***kinematski lanac.*** Kinematski lanac je ***otvoren*** (*sl.82.a*) ako je poslednji član vezan samo jednim članom mehanizma. Ukoliko je poslednji član vezan za dva ili više članova mehanizma kinematski lanac je ***zatvoren*** (*sl.82.b*)



a) *b)*

sl.82.

Broj stepeni slobode kretanja mehanizma predstavlja broj potrebnih koordinata da bi njegov položaj bio jednoznačno određen.

Strukturna formula za odredjivanje broja stepeni slobode, odnosno stepena pokretljivosti mehanizma *S*, kod ***ravnih*** mehanizama može se iskazati izrazom,

$$S = 3n - 2n_5 - n_4 \tag{6.2}$$

gdje je:

n – broj pokretnih članova mehanizma,

n_5 − broj kinematičkih parova niže klase,

n_5 − broj kinematičkih parova više klase.

Zadatak kinematike mehanizama jeste određivanje, u svakom trenutku vremena, kinematičkih veličina članova mehanizma u funkciji kinematskih vrijednosti pogonskog člana. Ovdje će biti proučeni osnovni oblici polužnih i kotrljajnih mehanizama.

6.2. POLUŽNI MEHANIZMI

Kinematski lanac sastavljen od rotacionih i prizmatičnih parova naziva se polužni mehanizam. Ovdje će biti prikazana kinematička analiza zglavkastog četverougaonika i klipnog mehanizma.

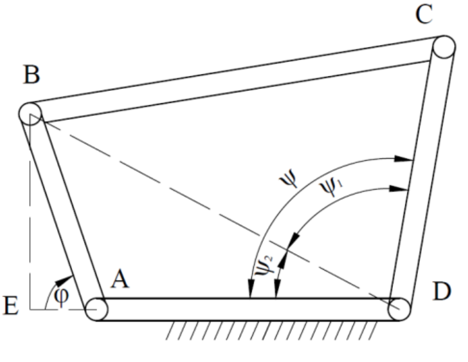
a) Zglavkasti četvorougao

Zglavkasti četverougao je kinematički lanac koji se sastoji iz četiri poluge spojene sa četiri cilindrična zgloba. Zavisno od odnosa dužina i poluga, ovaj mehanizam služi za pretvaranje jednog obrtnog kretanja u drugo obrtno, odnosno translatorno kretanje.

Stepen pokretljivosti zglavkastog četverougla *(sl.83)* je $S=1$, jer je

$n=3 \quad n_5=4 \quad n_4=0$, odnosno

$$S = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1$$



sl.83.

Posmatrajmo zglavkasti četverougao kod kog je poznat zakon obrtanja poluge A, $\varphi = \varphi(t)$ i rastojanja $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{BC}\ i\ \overline{CD}$, potrebno je odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje poluge $\overline{CD}$ u datom položaju mehanizma.

Za određivanje tražene ugaone brzine i ugaonog ubrzanja potrebno je odrediti zakon promjene ugla ψ. Polazi se od ΔBED odakle slijedi da je

$$tg\psi_2 = \frac{\overline{BE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}\,sin\varphi}{\overline{AD}+\overline{AB}cos\varphi} \tag{6.3}$$

dobija se

$$\psi_2 = arctg\,\frac{\overline{AB}\,sin\varphi}{\overline{AD}+\overline{AB}cos\varphi} \tag{6.4}$$

Iz ΔBCD, slijedi da je

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 2\overline{BD}\,\overline{CD}\,cos\psi_1 \tag{6.5}$$

Za određivanje ugla ψ_1, potrebno je naći $\overline{BD}$. Iz ΔABD slijedi da je

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + 2\overline{AB}\,\overline{AD}\,cos\psi \tag{6.6}$$

Primjenom kosinusne teoreme, u ΔBDC (*sl.83*), dobija se da je

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + 2\overline{AB}\,\overline{AD}\,cos\psi + \overline{CD}^2 - 2\overline{CD}\sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + 2\overline{AB}\,\overline{AD}\,cos\varphi}\,cos\psi_1 \tag{6.7}$$

odnosno,

$$cos\psi_1 = \frac{\overline{AB}^2+2\overline{AB}\,\overline{AD}\,cos\psi+\overline{CD}^2-\overline{BC}^2}{2\overline{CD}\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+2\overline{AB}\,\overline{AD}\,cos\varphi}} \tag{6.8}$$

tj.

$$\psi_1 = arccos\,\frac{\overline{AB}^2+2\overline{AB}\,\overline{AD}\,cos\psi+\overline{CD}^2-\overline{BC}^2}{2\overline{CD}\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+2\overline{AB}\,\overline{AD}\,cos\varphi}} \tag{6.9}$$

Tada je korišćenjem izraza (6.4) i (6.9)

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \tag{6.10}$$

Dakle, ako je poznato $\varphi = \varphi(t)$, tada je na osnovu prethodnog određeno i

$$\psi = \psi(t) \tag{6.11}$$

Ugaona brzina i ugaono ubrzanje poluge *BC* tada su određeni kao

$$\omega_{CD} = \dot{\psi}, \qquad \varepsilon_{CD} = \ddot{\psi} \tag{6.12}$$

Kao primjer kinematičke analize jednog zglavkastog četverougaonika, u određenom trenutku vremena, urađena je i u zadatku (*Zadatak 3.9*).

b) Klipni mehanizam

Klipni mehanizam je kinematički lanac koji se sastoji od: krivaje *OA*, klipne poluge *AB*, klizača *B* i postolja *I* (*sl.84).*

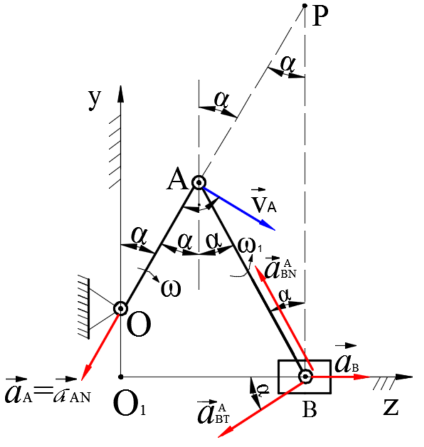
Stepen pokretljivosti klipnog mehanizma, može se odrediti, na osnovu toga da je

$$n=3 \quad n_5=4 \quad n_4=0, \tag{6.13}$$

kao,

$$S = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1 \tag{6.14}$$

Posmatrajmo klipni mehanizam (*sl.84.*) kod koga su poznata dužina krivaje *OA* i klipne poluge *AB* i neka u datom trenutku vremena, datom položaju, obje poluge zaklapaju isti ugao α sa osom O_1y koordinatnog sistema O_1xy. Potreno je naći ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje klipne poluge *AB* odnosno izvršnog člana (klizača B), ako je ugaona brzina krivaje ω=*cont.* i ako se klizač *B* kreće duž ose O_1x.



sl.84.

Na osnovu datih podataka određen je trenutni pol brzina *P* poluge *AB*, odakle se vidi da je trougao *ABP* jednakokraki pa je $\overline{AP} = \overline{AB}$.

Brzina tačke *A* kao tačke krivaje *OA* određena je sa

$$v_A = \overline{OA}\omega \tag{6.15}$$

a brzina tačke *A* kao tačke poluge *AB* određena je sa

$$v_A = \overline{AP}\omega_1 \tag{6.16}$$

gdje je sa ω_1 označena ugaona brzina klipne poluge AB . Iz jednačina (6.15) i (6.16) slijedida je

$$\omega_1 = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}\omega. \tag{6.17}$$

Kako se položaj trenutnog pola brzina poluge AB mijenja u svakom trenutku, tj. $\overline{AP} \neq const.$ iz prethodnog izraza ne može se zaključiti ništa u vezi ugaonog ubrzanja ε_1 klipne poluge AB.

Ugaono ubrzanje ε_1, može se odrediti i iz relacije

$$\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \vec{a}_{BN}^{A} + \vec{a}_{BT}^{A} \tag{6.18}$$

U ovoj relaciji nepoznat je intezitet vektora $\overrightarrow{a_B}$ i $\vec{a}_{BT}^{A}$. Ako vektorsku jednačinu (6.18), projektujemo na osu O_1y, slijedi da je

$$0 = -a_{AN}\cos\alpha + a_{BN}^{A}\cos\alpha - a_{BT}^{A}\sin\alpha \tag{6.19}$$

Kako je,

$$a_{AN} = a_A = \overline{OA}\omega^2 \text{ i}$$

$$a_{BN}^{A} = \omega_1^2 = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{AB}}\omega^2,\ a_{BT}^{A} = \overline{AB}\varepsilon_1,$$

slijedi da je

$$\varepsilon_1 = \lambda(\lambda - 1)\omega^2 \operatorname{tg}\alpha, \tag{6.20}$$

gdje je $\lambda = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$. Iz izraza za ε_1 je očigledno da je $\varepsilon_1 \neq \omega_1$. Da bi mehanizam mogao stalno da se kreće, mora da bude $\overline{AB} > \overline{OA}$. Slijedi da je $\lambda < 1$, tako da je $\varepsilon_1 < 0$, što znači da nije napravljena dobra pretpostavka za $\vec{a}_{BT}^{A}$. To znači da je smjer ε_1 isti kao i smjer ω_1. Dakle, spojna poluga u posmatranom položaju obrće se ubrzano.

Kao primjer, kinematička analiza u datom trenutku vremena jednog klipnog mehanizma, urađena je u ranijim zadacima (*Zadatak 3.5*) i (*Zadatak 3.8*).

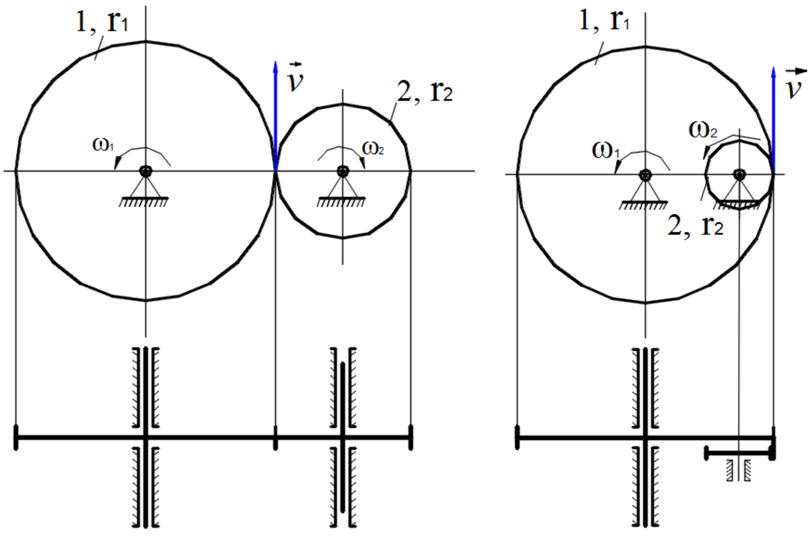
6.3.KOTRLJAJNI MEHANIZMI

Mehanizmi koji su namijenjeni za prenošenje obrtnog kretanja, sa jednog vratila koje se naziva vodeće, na drugo vratilo koje se naziva vođeno, nazivaju se kotrljajni (prenosni) mehanizmi.

Prenos obrtnog kretanja posljedica je postojanja sile trenja u dodirnim površinama točkova, kao što je to kod frikcionih prenosnika ili pomoću zubaca zupčanika, kao što je to kod zupčastih prenosnika.

U opštem slučaju, elementi prenosnog mehanizma obrću se različitim ugaonim brzinama. Ako je sa *1* označen vodeći element, a sa *2* vođeni element (*sl.85*), tada se *prenosni odnos* definiše kao

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{6.21}$$



sl.85.

Prenosni odnos govori o tome koliko puta se povećava ili smanjuje ugaona brzina obrtnog kretanja jednog tijela pri prenosu na obrtno kretanja drugog tijela.

Prenosnici čiji je prenosni odnos $i > 1$ nazivaju se reduktori, dok se prenosnici sa prenosnim odnosom $i < 1$ nazivaju multiplikatori.

Prenosni odnos može se izraziti i kao odnos drugih veličina. Ako je sa $\vec{v}$ označena brzina u tački dodira elemenata koji učestvuju u prenošenju obrtnog kretanja, tada važi

$$v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \tag{6.22}$$

Prethodni izraz omogućava da se prenosni odnos izrazi i u obliku

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \tag{6.23}$$

Dakle, odnos ugaonih brzina kod prenosnih mehanizama obrnuto je proporcionalan odnosu njihovih poluprečnika.

Osim toga, ako se sa z označi broj zubaca zupčanika koji čini prenosni mehanizam, a sa *e* korak zupčanika, tada važi

$$2r\pi = ze, \tag{6.24}$$

a pri tome je, sa *r* označen poluprečnik podeonog kruga. Relacija (6.24) može se napisati u obliku $2r = \frac{e}{\pi} z = mz$, gdje je sa *m* označen modul zupčanika. Tada važi da je

$$2r_1 = mz_1, \quad 2r_2 = mz_2 \tag{6.25}$$

tako da se prenosni odnos, može pisati kao

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} \tag{6.26}$$

Kako pri jednolikom (ravnomjernom) obrtanju, važi da je

$$\omega = \frac{2\pi n}{30}, \tag{6.27}$$

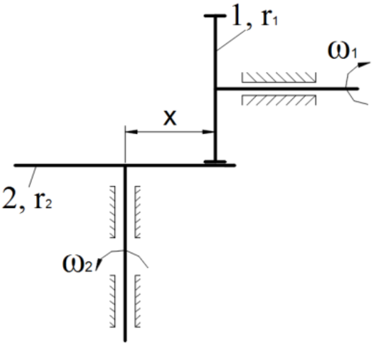
to se prenosni odnos može izraziti i u obliku

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} \tag{6.28}$$

Treba napomenuti, da je prenosni odnos niza spojenih elemenata prenosnog mehanizma sa međuelementima jednak proizvodu prenosnih odnosa između pojedinih elemenata.

Prenosni mehanizmi mogu biti i sa kontinualno promjenjivim prenosnim odnosom, takvi prenosnici kretanja nazivaju se *varijatori* (*sl.86*). Kod njih je prenosni odnos odrđen sa

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{x}{r_1} \tag{6.29}$$



sl.86.

Ako je poznata brzina vodećeg vratila ω_1, tada je brzina vođenog vratila određena sa,

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{x} \tag{6.30}$$

i očigledno je na koji način ugaona brzina vođenog zupčanika zavisi od promjenjivog raspojanja *x*.

LITERATURA

[1] L. Rusov, *Mehanika II- Kinematika*, Naučna knjiga Beograd, 1992

[2] M.Simonović, Z.Mitrović, Z.Golubović, *Mehanika- Kinematika,* II izdanje, Mašinski fakultet Beogradu, 2015

[3] D.Vukojević, *Kinematika*, Mašinski fakultet Zenica, 1997

[4] N. Mladenović, *Mehanika II- Kinematika*, Mašinski fakultet Beograd, 1996

[5] N. Mladenović, Z.Mitrović, Z.Stokić, *Zbirka zadataka iz kinematike*, Mašinski fakultet Beograd, 2009

[6] I. Karabegović, *Kinematika*, Tehnički fakultet Bihać, 2004

[7] S. Đurić, *Mehanika II- Kinematika*, Mašinski fakultet Beograd, 1990

[8] S.M.Targ, *Teorijska mehanika* (prevod sa ruskog), Građevinska knjiga Beograd, 1979

[9] I.V.Mešćerski, *Zbirka zadataka iz teorijske mehanike* (prevod sa ruskog), Građevinska knjiga Beograd, 1979

[10] D. Milosavljević, *Kinematika- metodička zbirka riješenih problema sa izvodima iz teorije,* Eskod, Kragujevac, 2009

[11] I. Voronkov, *Teorijska mehanika*, Mašinski fakultet Beograd, 1981

[12] Bat, M.I., G.J. Džanelidza, A.S. Kelzon:, *Riješeni zadaci iz teorijske mehanike sa izvodima iz teorije*, I - Statika i kinematika, prijevod s ruskog, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.

[13] V. Andrejev, *Mehanika II - Kinematika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.

[14] Hauger, Lippmann, Mannl: *Aufgaben zu Technische Mechanik 1-3*, Springer - Lehrbuch, Berlin, 1991.

[15] V. Določek, *Zbirka zadataka iz kinematike*, Svjetlost, Sarajevo, 1973.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна и универзитетска библиотека
Републике Српске, Бања Лука

531.1(075.8)

АНТУНОВИЋ, Ранко, 1972-
Mehanika : kinematika / Ranko Antunović. - 1. izd. - Istočno Sarajevo : Mašinski fakultet, 2017 (Istočno Sarajevo : Ermex). - 179 str. : graf. prikazi ; 25 cm

Tiraž 200. - Bibliografija: str. 179.

ISBN 978-99976-623-9-2

COBISS.RS-ID 6330136