Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Mašinski fakultet Istočno Sarajevo

Numeričke metode u inženjerstvu

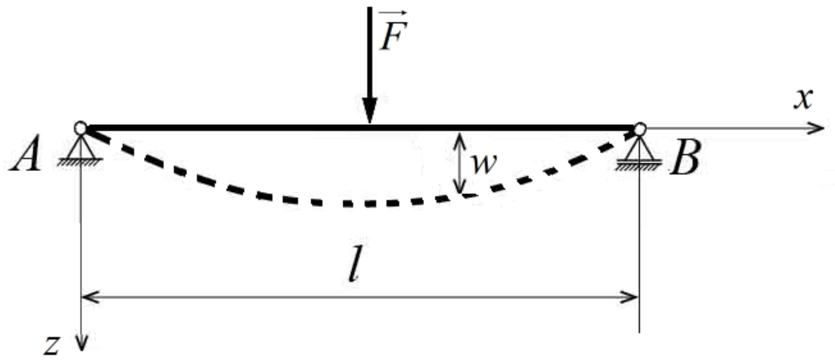
1.Uvod

1.1 Metode rješavanja inženjerskih problema
1.2 O numeričkim metodama

Doc. dr Dejan Jeremić

1. Uvod

1.1 Metode rješavanja inženjerskih problema



Diferencijalna jednačina elastične linije $EI_y \cdot w'' = -M_y$ $w'' = -\frac{M_y}{EI_y}$ $\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y}$

U rješavanju inženjerskih problema koriste se analitičke, eksperimentalne i numeričke metode. Analitičke metode se baziraju na matematičkim principima tačnog rješavanja sistema običnih ili parcijalnih diferencijalnih jednačina. Međutim, u inženjerskoj praksi jednačine koje opisuju realne probleme su veoma složene i nije ih moguće riješiti analitičkim metodama. Pravljenje nekog jednostavnijeg matematičkog modela koji je rješiv analitički vodi ka nedovoljno tačnom rješenju.

Eksperimentalnim metodama dolazi se do potrebnih informacija o fizikalnom problemu na osnovu analize eksperimentalnog modela ili objekta pri čemu se koristi odgovarajući mjerni instrument. Međutim, u velikom broju slučajeva mjerenjem neke veličine na realnom objektu praćeno je značajnim poteškoćama, a ponekad je to i nemoguće obaviti.
Neki sistemi su veoma složeni tako da je na njima nemoguće vršiti mjerenje eksperimentalnim putem. To se prije svega odnosi na zemljinu atmosferu, neke mikro i nanao sisteme. Takođe, velike su poteškoće eksperimentalnih istraživanja u medicini pri ispitivanju čovjeka i životinja. Osim toga, značajan ograničavajući faktor u eksperimentalnim istraživanjima jeste njihova visoka cijena.

Sa razvojem nauke, prije svega matematike, dolazi se do značajnog napretka u razvoju numeričkih metoda koje se koriste kao alternativa eksperimentalnih istraživanja. Osnovna karakteristika svake numeričke metode ogleda se u tome da ona predstavlja približno rješenje nekog realnog fizikalnog sistema, pri čemu to rješenje mora biti dovoljno tačno. Od te tačnosti najviše zavisi primjenjivost posmatranog numeričkog modela.

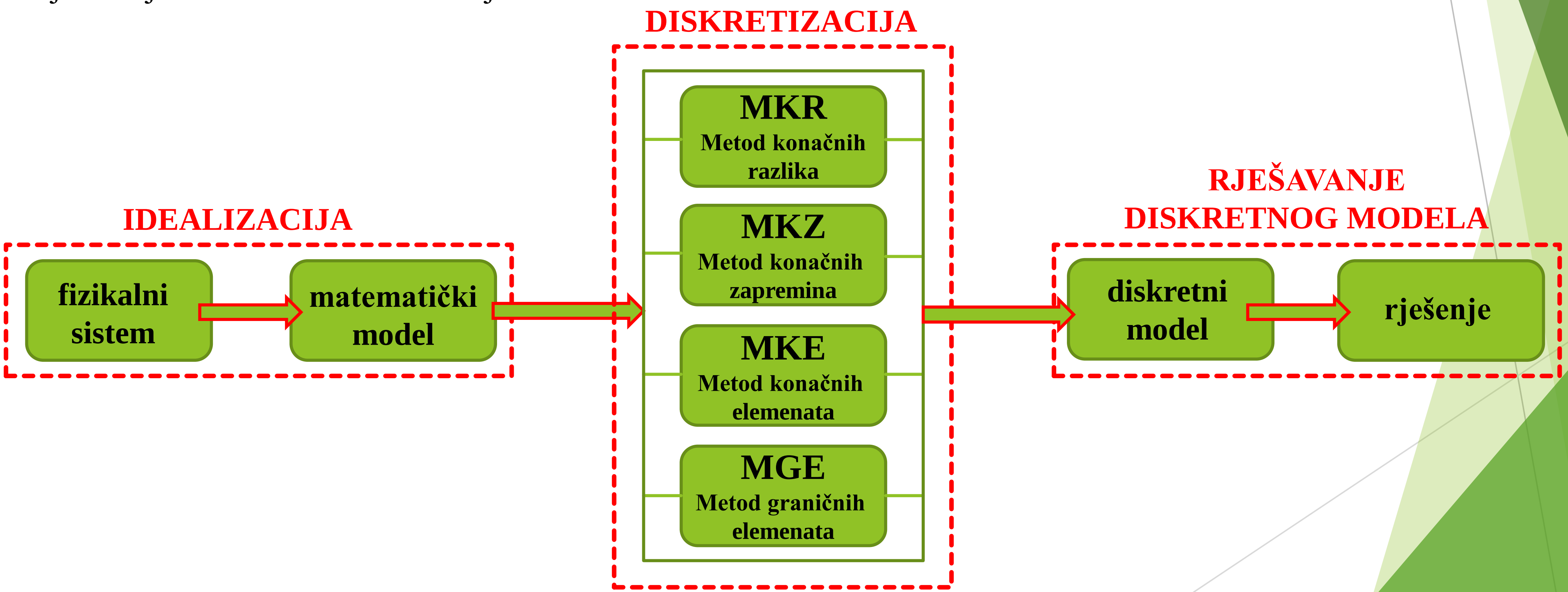
Tačnost numeričke metode je uvijek uslovljena sumom matematičkih formulacija kao i formulacijom numeričkog metoda koji nam služi za rješavanje sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina. Osnovna svrha korištenja numeričkih metoda ogleda se u smanjenju troškova i vremena ispitivanja eksperimentalnog modela.

Međutim, veoma često eksperimentalna metoda se koristi za određivanje vrijednosti nekih parametara koji su neophodni za primjenu numeričke metode. Kod ispitivanja materijala to su uglavnom Jangov modul elastičnosti (E), zatezna čvrstoća, modul elastičnosti, granica proporcionalnosti i dr.

1.2 O numeričkim metodama

Postupak rješavanja inženjerskih problema primjenom numeričkih metoda sastoji se od tri faze:

1. Idealizacija ili matematičko modelovanja,
2. Diskretizacija matematičkog modela,
3. Rješavanje sistema diskretizovanih jednačina.



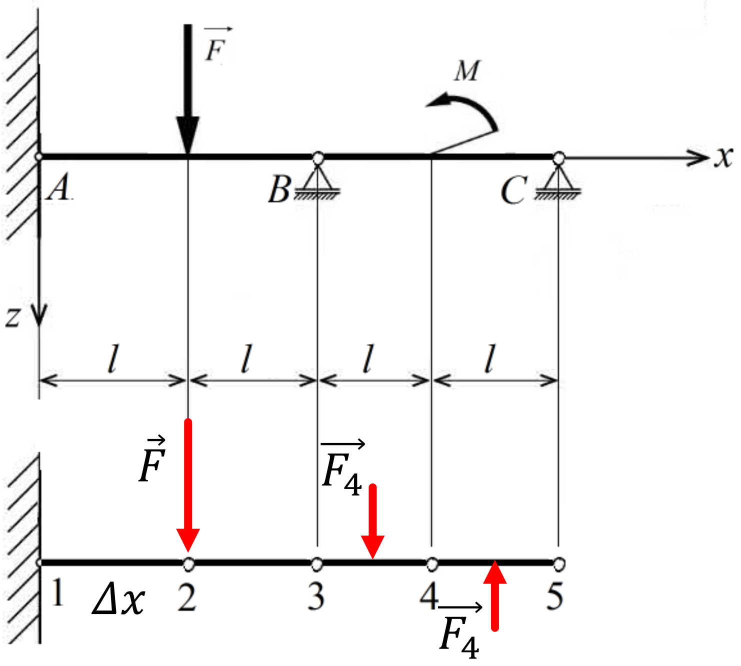
Idealizacija (matematičko modelovanje) je opisivanje fizikalnih sistema odgovarajućim matematičkim modelom. Matematički model može biti izveden u diferencijalnoj i varijacijskoj formulaciji.

Diferencijalna formulacija je opisana sistemom diferencijalnih jednačina u prostoru ili vremenu uključujući odgovarajuće početne i granične uslove. Primjenom matematičkih transformacija moguće je u integralne jednačine ukljkučiti i određene granične uslove. Rješenja diferencijalnih jednačina aproksimiraju se pomoću pretpostavljenih funkcija i nepoznatih parametara, nakon čega se težinske integralne jednačine transformišu u sistem algebarskih jednačina čija su rješenja nepoznati parametri. Ti postupci spadaju u grupu metoda težinskog reziduala koje se razlikuju zavisno od izbora težinskih funkcija.

Varijacijska formulacija se temelji na funskcionalu iz čijeg je uslova stacionarnosti moguće izvesti diferencijalnu formulaciju. Odnosno, u uslovu stacionarnosti funkcionala sadržane su osnovne diferencijalne jednačine zajedno sa odgovarajućim graničnim uslovima. Uslov za varijacijsku formulaciju je postojanje funkcionala, što znači da diferencijalna formulacija ima širu primjenu od varijacijske formulacije. ***Funkcional je*** u matematičnom smislu funkcija određena integralom čiji su argumenti takođe funkcije. U mehanici elastičnih tijela funkcional je jednak ukupnoj potencijalnoj energiji. Približna metoda koja se temelji na varijacijskoj formulaciji je Rayleigh-Ritzova metoda. Rješenje za ramatrano područje pretpostavlja se u obliku proizvoda interpolacijskih funkcija i nepoznatih parametara. Nakon uvrštavanja rješenja u funkcional, iz uslova stacionarnosti dobija se sistem algebarskih jednačina čija su rješenja nepoznati parametri. Varijacijska Rayleigh-Ritzova metoda kao i metode težinskog reziduala mogu se primjeniti samo za rješavanje jednostavnijih problema. Često je za složenije matematičke modele vrlo teško pronaći funkcije koje dovoljno tačno opisuju raspodjelu odgovarajućih fizikalnih veličina i cijelom razmatranom području.

Diskretizacija je postupak kojim se kontinualni sistem zamjenjuje diskretnim sistemom koji se opisuje sa konačnim brojem nepoznatih varijabli. Razlikuje se diskretizacija područja i diskretizacija jednačina. Diskretizacija područja predstavlja podjelu na konačan broj potpordučja za kojoa se izračunavaju nepoznate varijable. Relacije za izračunavanje tih varijabli izvode se diskretizacijom jednačina kojima se aproksimiraju kontinualni sistemi. Primjenom postupka diskretizacije, sistem diferencijalnih jednačina zamjenjuje se sistemom algebarskih jednačina.

Najstarija diskretizacijska metoda je ***metoda konačnih razlika (MKR)*** koja je svoju pravu primjenu našla sa razvojem računara. MKR se temelji na diskretizaciji razmatranog područja disketnim tačkama (čvorovima) koje čine mrežu konačnih razlika. U tim tačkama se postavljaju diferencijalne jednačine pri čemu se derivacije (izvodi) zamjenjuju konačnim razlikama koje se opisuju vrijednostima zavisnih varijabli u susjednim čvorovima.



$n = 5$ -broj čvorova

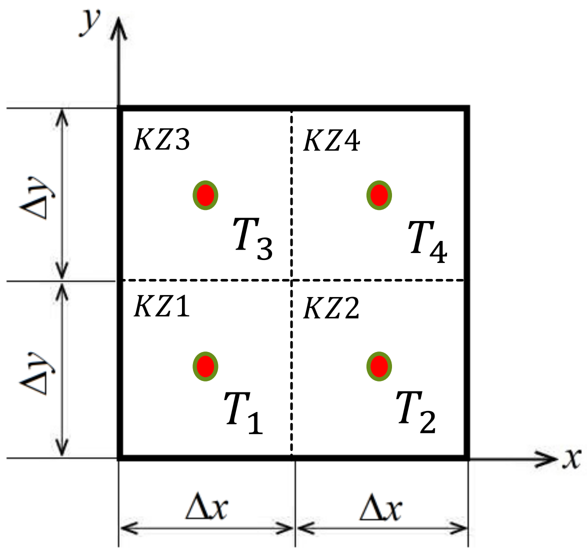
$$w_1 = 0$$
$$w_3 = 0$$
$$w_5 = 0$$

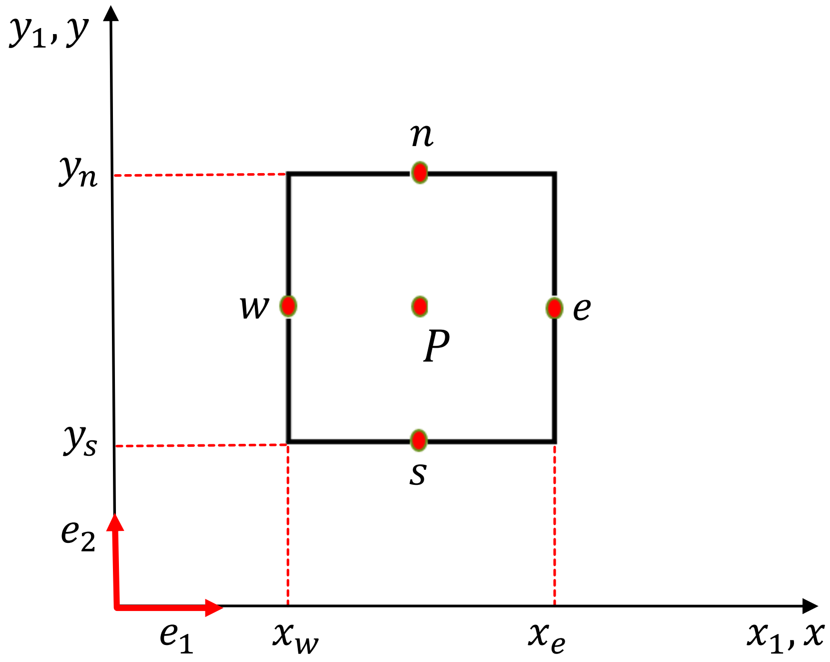
-vertikalno pomjeranje u čvorovima

Dobija se sistem algebarskih jednačina čija su rješenja vrijednosti varijabli u čvorovima. Rješenja za područja između čvorova po pravilu nije moguće dobiti jer se metoda ne temelji na aproksimacijskim funkcijama. Nedostatak ove metode se ogleda u tome da je za složenije probleme veoma teško opisati granične (konturne) uslove, a to posebno dolazi do izražaja ako su u granične uslove uključene derivacije višeg reda. Danas se ova metoda uglavnom primjenjuje za rješavanje problema u mehanici fluida i za vremensku diskretizaciju pri rješavanju nestacionarnih problema. U mehanici deformabilnih tijela primjenjuje se samo za rješavanje jednostavnih problema.

Druga diskretizacijska metoda je ***metoda konačnih zapremina (MKZ).*** Njena primjena se uglavnom odnosi na rješavanje problema mehanike strujanja, iako se može primjenjivati i u području mehanike deformabilnih tijela, kao i u rješavanju drugih inženjerskih problema.

Diskretizacija se provodi podjelom razmatranog područja na potpodručja koja se nazivaju konačne ili kontrolne zapremine za koje se postavlja integralna jednačina, pri čemu se integrali po zapremini transformišu u površinske integrale koji se zamjenjuju približnim vrijednostima.





Kontrolna zapremina

Nakon odgovarajućih transformacija, za svaku kontrolnu zaperminu se izvodi diskretizovana jednačina pri čemu se nepoznata zavisna varijabla najčešće odnosi na središnju tačku (čvor) kontrolne zapremine. Slaganjem diskretizovanih jednačina za pojedina područja, izvodi se globalni sistem algebarskih jednačina za proračunski model čije su nepoznate varijable u čvorovima kontrolnih zapremina.

Najširu primjenu pri rješavanju inženjerskih problema ima diskretizacijska ***metoda konačnih elemenata (MKE).*** Teško je naći funkcije koje za čitavo područje definicije dovoljno tačno opisuju rješenje diferencijalne jednačine, pa se razmatrano područje dijeli na manje dijelove, odnosno potpodručja koja nazivamo konačnim elementima.

Za svaki konačni element pretpostavlja se rješenje diferencijalne jednačine u obliku interpolacijslih funkcija i zavisnih varijabli u tačkama koje su najčešće smještene duž ivica elemenata. Te tačke su čvorovi konačnih elemenata.

Primjenom metoda težinskog reziduala ili varijacijske Rayleigh-Ritzove metode, za svaki konačni element uvodi se diskretizovana jednačina koja čini sistem algebarskih jednačina čije su nepoznate vrijednosti u čvorovima.

Nakon toga se izvodi globalni diskretizovani sistem jednačina za cijelo razmatrano područje, pri čemu su nepoznate čvorne vrijednosti svih konačnih elemenata proračunskog modela. MKE ima najširu primjenu u mehanici čvrstih tijela.

U sklopu ovog kursa izučavaćemo nekoliko numeričkih metoda koje se zasnivaju na sasvim različitim mehaničkim i matematičkim principima.

-Metoda težinskog reziduala (Galerkinova metoda),

-Rayleigh-Ritzova metoda,

-Metoda konačnih razlika,

-Metoda konačnih zapremina

Međutim, ono što je zajedničko za svaku od ovih metoda jeste da se sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina, koji predstavlja matematički model svodi na sistem linearnih algebarskih jednačina.

To nastaje kao rezultat diskretizacije matematičkog modela. Što je diskretizacija „sitnija“, to je broj linearnih algebarskih jednačina veći.

Na taj način se postiže veća tačnost, ali je postupak rješavanja linearnih jednačina duži i složeniji.