Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Mašinski fakultet Istočno Sarajevo

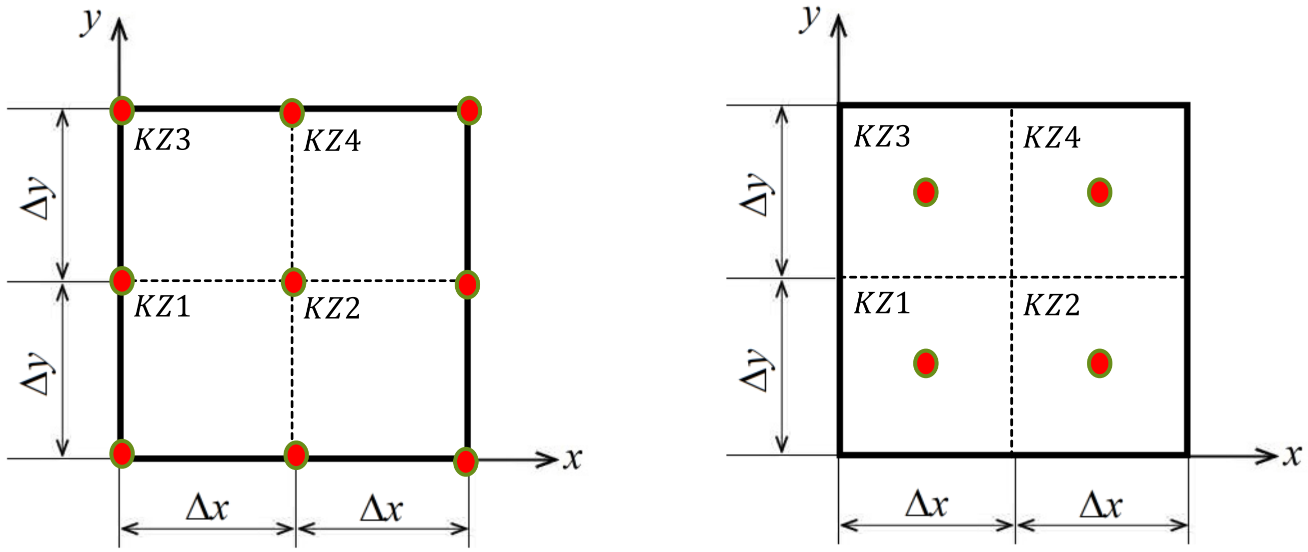
# Numeričke metode u inženjerstvu

## 7. Metoda konačnih zapremina (MKZ)
### 7.1 Aproksimacija integrala
### 7.2 Diskretizacija stacionarne jednačine prenosa

Doc. dr Dejan Jeremić

***Metoda konačnih zapremina (MKZ)*** je diskretizacijska metoda. Njena primjena se uglavnom odnosi na rješavanje problema mehanike strujanja, prenosa toplote i elektromagnetnog polja, iako se može primjenjivati i u području mehanike deformabilnih tijela, kao i u rješavanju drugih inženjerskih problema.

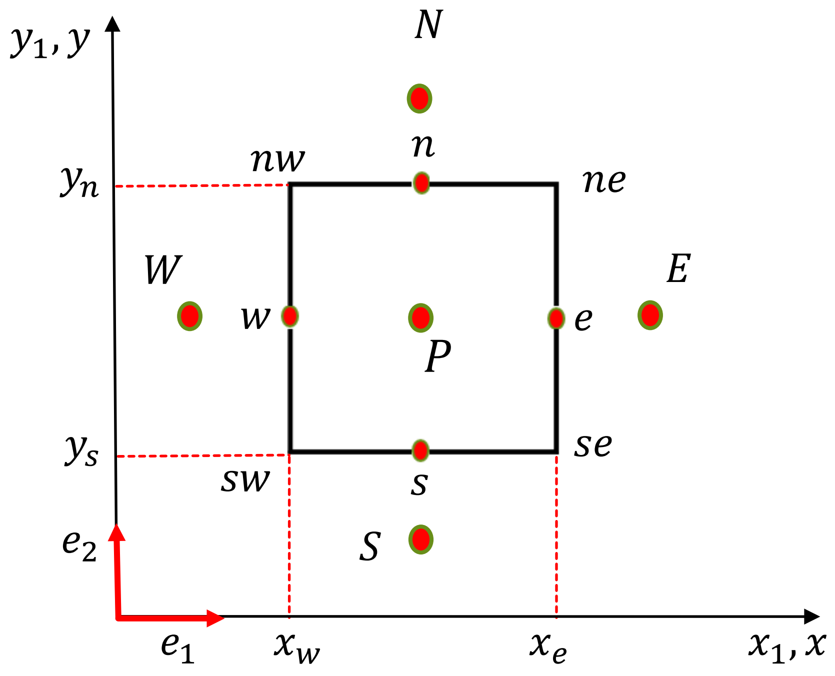
Diskretizacija se provodi podjelom razmatranog područja na odgovarajući broj potpodručja koja se nazivaju konačne ili kontrolne zapremine za koje se postavlja integralna jednačina. Prilikom diskretizacije potrebo je izabrati tačke u kojima će se izračunavati nepoznate varijable. Razlikuju se čvorovi u vrhovima i u sredini (težištu) konačnih zapremina.




Položaj čvorova u kontrolnim zapreminama

Ovdje će se razmatrati formulacija sa čvorovima u središtu kontrolnih zapremina. Mada se u dvodimenzionalnim problemima radi o površinama, uobičajeno je da se površine nazivaju kontrolnim zapreminama.

Razlikuju se tačke u središtu kontrolnih zapremina, tačke koje polove stranice i tačke u vrhovima četverougla. Primjenjuju se oznake kao pri orijentaciji u prostoru (oznake na kompasu strana svijeta). Središnje tačke okolnih kontrolnih zapremina se takođe označavaju prema stranama svijeta.




Kontrolna zapremina

Nakon odgovarajućih transformacija, za svaku kontrolnu zapreminu se izvodi diskretizovana jednačina pri čemu se nepoznata zavisna varijabla odnosi na središnju tačku (čvor) kontrolne zapremine. Slaganjem diskretizovanih jednačina za pojedina područja, izvodi se globalni sistem algebarskih jednačina za proračunski model čije su nepoznate varijable u čvorovima kontrolnih zapremina.

Prikazaćemo metodu konačnih zapremina na primjeru dvodimenzionalne stacionarne jednačine prenosa toplote

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho v_i \phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) = f \qquad i = 1,2 \qquad (7.1)$$

Integraljenjem izraza (7.1) po proizvoljnoj kontrolnoj zapremini dobija se

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho v_i \phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) d\,V = \int_V f dV \qquad (7.2)$$

Ako na lijevu stranu jednačine primjenimo Gaussovu integralnu teoremu, lijeva strana prelazi u izraz

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho v_i \phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) d\,V = \int_S \left(\rho v_i \phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) n_i dS \qquad (7.3)$$

$S$ -površina plohe koja ograničava zapreminu $V$
$n_i$ -komponente jediničnog vektora vanjske normale na plohu u Kortezijevim koordinatama

Nakon uvrštavanja izraza (7.3) u izraz (7.2) dobijamo

$$\int_S \left(\rho v_i \phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) n_i dS = \int_V f\, dV \qquad (7.4)$$

Rješavaćemo problem provođenja toplote u čvrstom tijelu kod koga se svaka elementarna čestica nalazi u stanju mirovanja $v_i = 0$ pa tako dobijamo izraz

$$-\int_S \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) n_i dS = \int_V f\, dV \qquad (7.5)$$

Površinski integral (7.5) se može napisati kao zbir četiri površinska integrala po stranicama kontrolne zapremine koju ćemo označiti sa $S_k$ , gdje se indeks ***k*** odnosi na tačke koje polove stranice $k = e, w, n, s$ .

$$-\int_S \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) n_i dS = -\sum_k \int_{S_k} \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) n_{ki} dS_k \qquad (7.6)$$

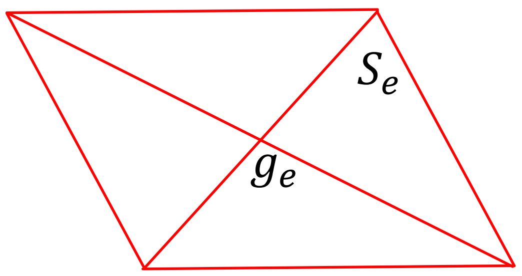
Pravila indeksnog zapisa se odnose samo na indeks *i*. Integral na desnoj strani izraza (7.6) predstavlja difuzioni tok za *k*-tu stranicu kontrlone zapremine.

$$F_k^D = -\int_{S_k} \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) n_{ki} dS_k \qquad (7.7)$$

## 7.1 Aproksimacija integrala

Za diskretizaciju razmatranog problema potrebno je provesti aproksimaciju površinskih i zapreminskih integrala (pronaći funkciju koja približno opisuje skup tačaka). Pri aproksimaciji površinskih integrala prvo će se provesti aproksimacija vrijednostima podintegralnih funkcija na stranicama kontrolnih zapremina, da bi se nakon toga vrijednosti na stranicama kontrolnih zapremina zamjenile vrijednostima u središnjim čvorovima. Za aproksimaciju integrala primjeniće se formula srednje tačke (midpoint integration formula), na osnovu koje je aproksimacija površinskog integrala za stranicu *e* jednaka

$$\int_{S_e} g\,dS_e \approx g_e S_e \qquad (7.8)$$




$g$ -podintegralna funkcija

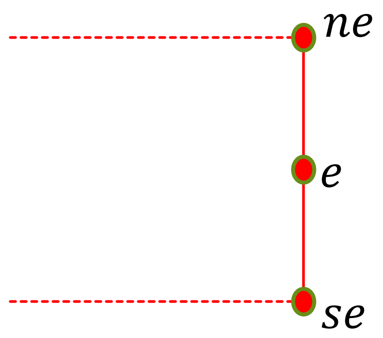
$g_e$ -vrijednost podintegralne funkcije u središnjem čvoru *e* na stranici kontrolne zapremine $S_e$

Primjenom formule srednje tačke i na osnovu izraza (7.7) aproksimacija difuzionog toka za *k*-tu stranicu kontrolne zapremine se može prikazati relacijom

$$F_k^D = -\int_{S_k} \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) n_{ki}\, dS_k \approx -\lambda n_{ki} S_k \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)_k \qquad (7.9)$$

U numeričkoj integraciji  se često koriste trapezna i Simpsonova formula. Prema trapeznoj formuli aproksimacija površinskog integrala za stranicu $S_e$ je jednaka

$$\int_{S_e} g dS_e \approx S_e \frac{(g_{ne} - g_{se})}{2} \qquad (7.10)$$




$g_{ne}, g_{se}$ -vrijednosti podintegralne funkcije u vrhovima četverougaone kontrolne zapremine koji su pridruženi stranici e

Prema Simpsonovoj formuli aproksimacija integrala je

$$\int_{S_e} g dS_e \approx S_e \frac{(g_{ne} + 4g_e + g_{se})}{6} \qquad (7.11)$$

Primjenom formule srednje tačke takođe se može aproksimirati i zapreminski integral. U tom slučaju se pretpostavlja da je srednja vrijednost podintegralne funkcije *f* u zapreminskom integralu (7.5) jednaka vrijednosti funkcije u središnjem čvoru (P) koji je smješten u težištu razmatrane kontrolne zapremine.

$$\int_{V} f dV \approx f_P \Delta V \qquad (7.12)$$

U izrazu (7.12) $\Delta V$ predstavlja zapreminu kontrolne zapremine čiji se iznos za četverougaonu kontrolnu zapreminu izračunava pomoću koordinata vrhova četverougla pomoću sljedeće relacije

$$\Delta V = \frac{1}{2}[(x_{se} - x_{nw})(y_{ne} - y_{sw}) + (x_{ne} - x_{sw})(y_{nw} - y_{se})] \qquad (7.13)$$

## 7.2 Diskretizacija stacionarne jednačine prenosa

Primjenom formule srednje tačke, aproksimacija integralne jednačine (7.5) se može napisati u obliku

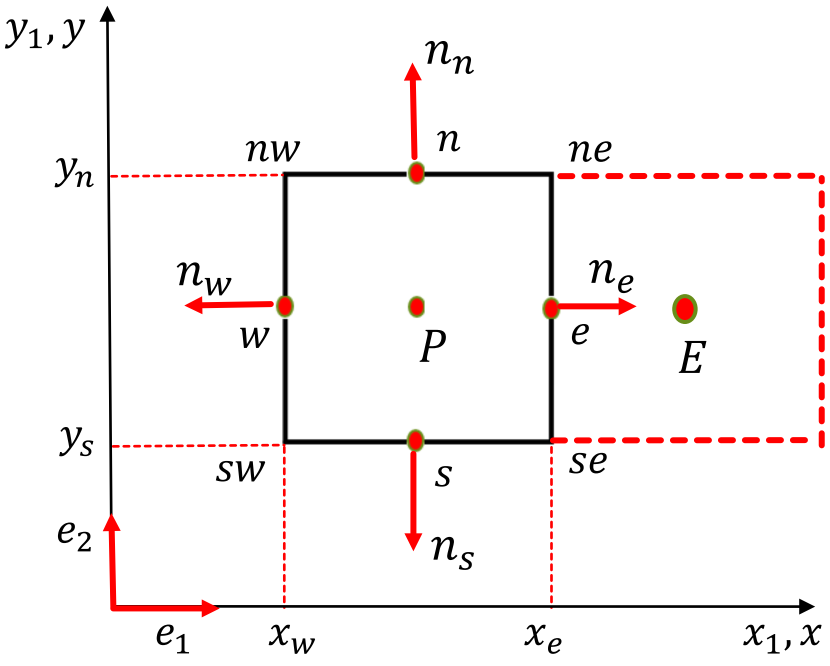
$$-\sum_k \lambda n_{ki} S_k \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)_k = f_P \Delta V \qquad (7.14)$$

$$k = e, w, n, s$$

Lijeva strana izraza (7.14) je aproksimacija difuziong toka za stranice kontrolne zapremine $S_k$, a desna strana je aproksimacija izvora. Potrebno je derivaciju $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ prikazati pomoću vrijednosti funkcije $\phi$ u središnjim čvorovima susjednih kontrolnih zapremina.

Razmatranjem pravougaone kontrolne zapremine u Kartezijevim koordinatama za koje su vanjske normale paralelene sa koordinatnim osama, a vektori vanjskih normala su

$$n_e = e_1$$
$$n_w = -e_1$$
$$n_n = e_2$$
$$n_s = -e_2$$




Pravougaona kontrolna zapremina

Aproksimacija derivacije će se prikazati na primjeru derivacije u tački $e$ $\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e$ .

Primjenom forme srednje razlike (6.4), derivacije u tački $e$ približno je jednaka

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P} \qquad (7.15)$$

$\phi_P$ -vrijednost varijable u središnjem čvoru P razmatrane kontrolne zapremine

$\phi_E$ -vrijednost varijable u središnjem čvoru E sisjedne kontrolne zapremine

Razmatranjem pravougaone kontrolne zapremine, izraz (7.14) možemo napisati u obliku

$$-\lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)_e n_{ei}S_e - \lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)_w n_{wi}S_w - \lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)_n n_{ni}S_n - \lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)_s n_{si}S_s = f_P \Delta V \qquad (7.16)$$

Sabiranjem po ponovljenim indeksima *i* dobijamo

$$\begin{aligned}
&-\lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)_e n_{e1}S_e - \cancel{\lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)_e n_{e2}S_e} \\
&-\lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)_w n_{w1}S_w - \cancel{\lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)_w n_{w2}S_w} \qquad (7.17) \\
&-\cancel{\lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)_n n_{n1}S_n} - \lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)_n n_{n2}S_n \\
&-\cancel{\lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)_s n_{s1}S_s} - \lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)_s n_{s2}S_s = f_P \Delta V
\end{aligned}$$

Ako uvrstimo u izraz (7.17) komponente vektora jednične normale dobijamo

$$\begin{array}{lll}
n_{e1} = 1 & n_{e2} = 0 & \\
n_{w1} = -1 & n_{w2} = 0 & x_1 \to x \\
n_{n1} = 0 & n_{n2} = 1 & x_2 \to y \\
n_{s1} = 0 & n_{s2} = -1 &
\end{array}$$

$$-\lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e S_e + \lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w S_w - \lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_n S_n + \lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_s S_s = f_P \Delta V \qquad (7.18)$$

Nakon aproksimacije derivacije prema (7.15) i prikaza dužina stranica pomoću koordinata vrhova pravougaone kontrolne zapremine

$$S_n = S_s = x_e - x_w = \Delta x$$
$$S_e = S_w = y_n - y_s = \Delta y$$

izvodi se konačan izraz za razmatranu kontrolnu zapreminu

$$\boxed{\begin{gathered} -\lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e \Delta y + \lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w \Delta y - \lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_n \Delta x + \lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_s \Delta x = f_P \Delta V \\ \text{ili} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e \Delta y - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w \Delta y + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n \Delta x - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s \Delta x = -\frac{\rho q}{\lambda} \Delta x \cdot \Delta y \end{gathered}} \qquad (7.19)$$

$\lambda$ -toplotna provodljivost
$q$ -toplotni izvor (ponor)
$T$ -temperatura (K)
$\rho$ -gustina
$\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y$

**Primjer 1.**

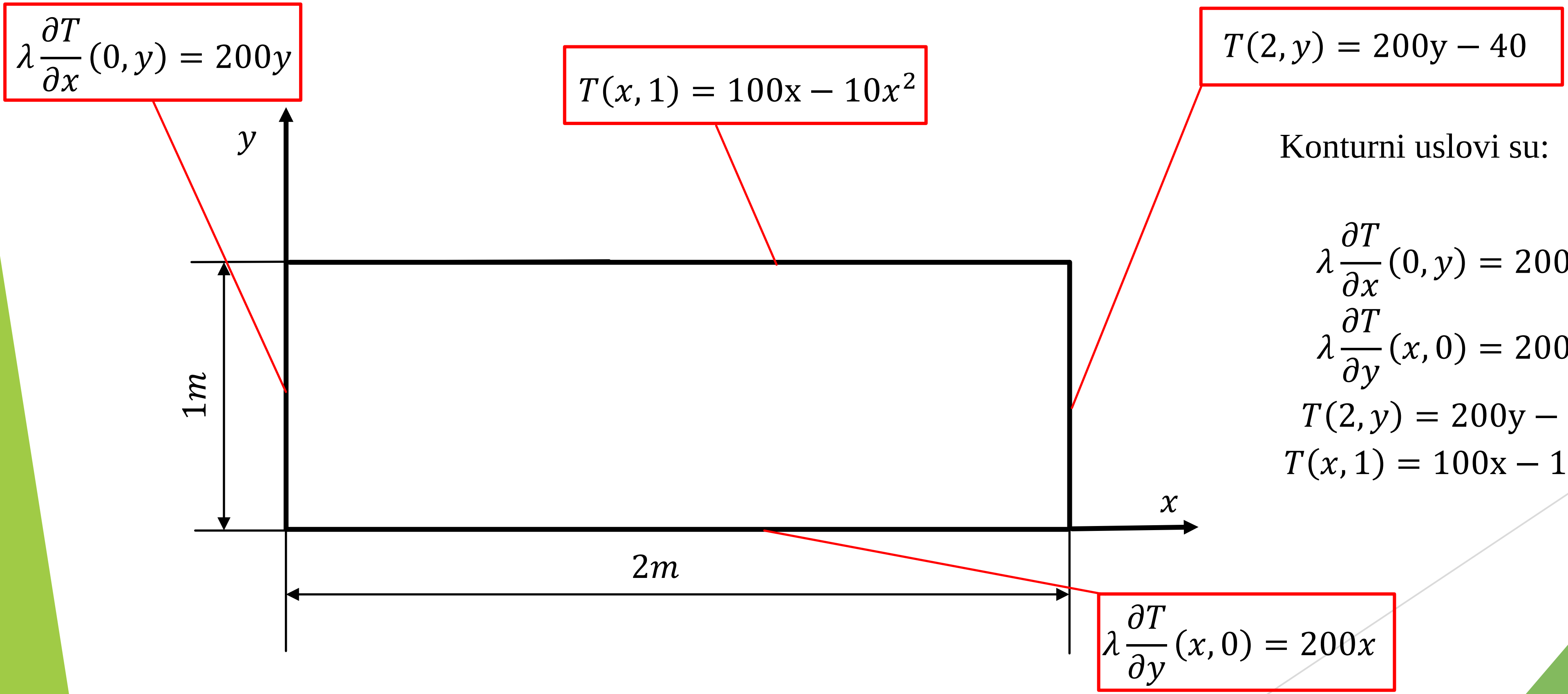
Za homogenu ploču prikazanu na slici potrebno je postaviti sistem jednačina konačnih zapremina za problem provođenja toplote. Problem diskretizovati sa 2x2 jednake konačne zapremine.

Zadano je: $q = 40\left[\frac{W}{kg}\right], \rho = 1\left[\frac{kg}{m^3}\right], \lambda = 2\left[\frac{W}{mK}\right]$

$\lambda$ -toplotna provodljivost

$q$ -toplotni izvor (ponor)

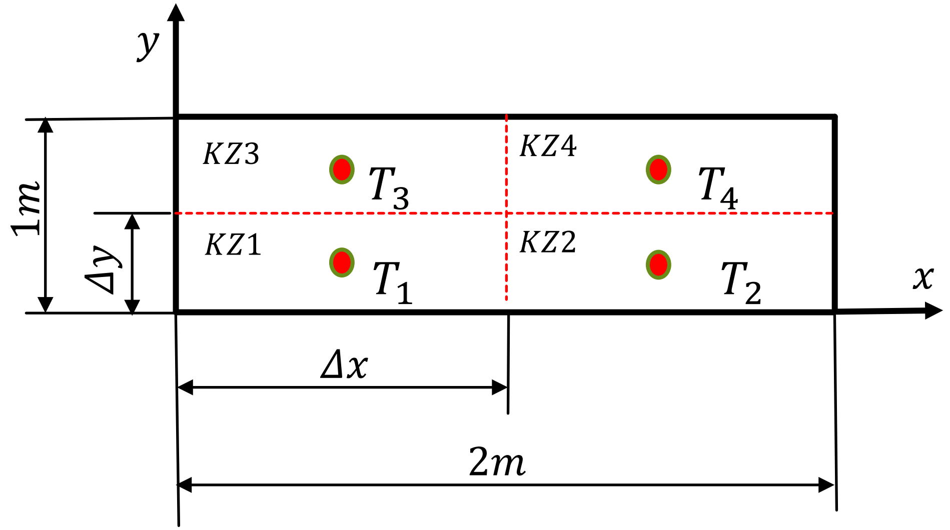
$\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y$ -veličina konačne zapremine




Konturni uslovi su:

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x}(0,y) = 200y$$
$$\lambda\frac{\partial T}{\partial y}(x,0) = 200x$$
$$T(2,y) = 200\text{y} - 40$$
$$T(x,1) = 100\text{x} - 10x^2$$

Diskretizacija modela



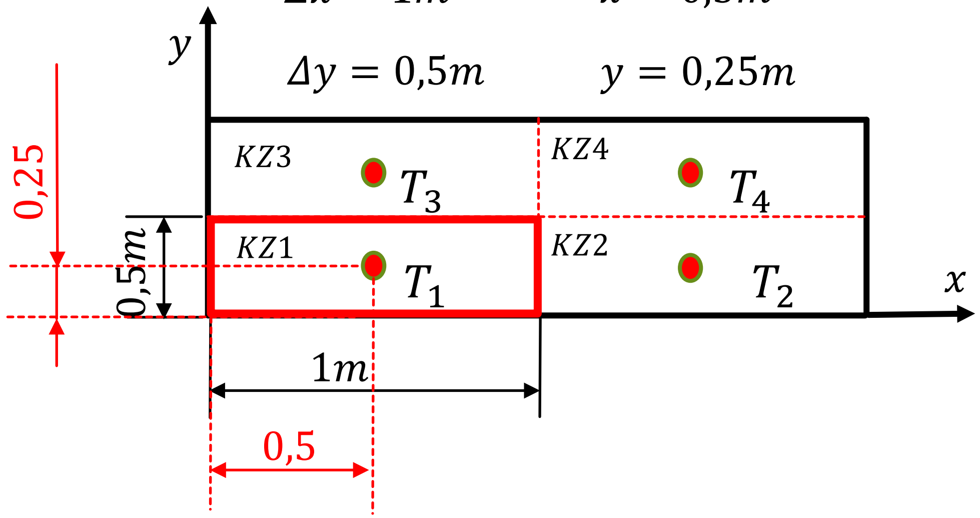

Jednačina konačne zapremine

$$\boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e \Delta y - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w \Delta y + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n \Delta x - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s \Delta x = -\frac{\rho q}{\lambda}\Delta V}$$

Konačna zapremina 1 (KZ1)

$\Delta x = 1m$ $\quad x = 0{,}5m$

$\Delta y = 0{,}5m$ $\quad y = 0{,}25m$




$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e = \frac{T_2 - T_1}{1}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w = \frac{1}{\lambda}200y = \frac{1}{2}200 \cdot 0{,}25 = 25$$ -konturni uslov

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n = \frac{T_3 - T_1}{0{,}5}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s = \frac{1}{\lambda}200x = \frac{1}{2}200 \cdot 0{,}5 = 50$$ -konturni uslov

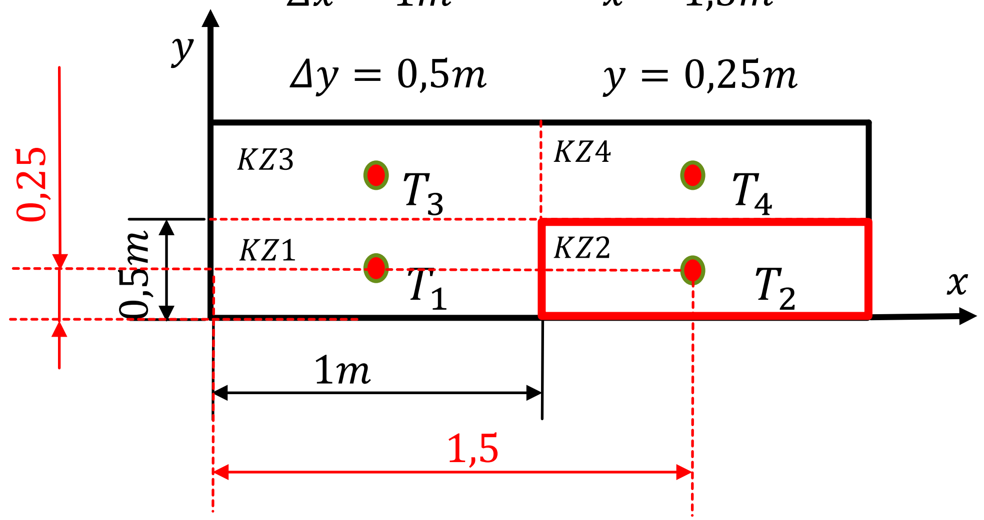
$$\frac{T_2 - T_1}{1} \cdot 0{,}5 - 25 \cdot 0{,}5 + \frac{T_3 - T_1}{0{,}5} \cdot 1 - 50 \cdot 1 = -\frac{40}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}5$$

$$\boxed{-2{,}5T_1 + 0{,}5T_2 + 2T_3 = 52{,}5}$$

Konačna zapremina 2 (KZ2)

$\Delta x = 1m \qquad x = 1{,}5m$

$\Delta y = 0{,}5m \qquad y = 0{,}25m$




$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e = \frac{T_e - T_2}{0{,}5} = \frac{200 \cdot 0{,}25 - 40 - T_2}{0{,}5} = \frac{10 - T_2}{0{,}5}$$ -konturni uslov

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w = \frac{T_2 - T_1}{1}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n = \frac{T_4 - T_2}{0{,}5}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s = \frac{1}{\lambda} 200x = \frac{1}{2} 200 \cdot 1{,}5 = 150$$ -konturni uslov

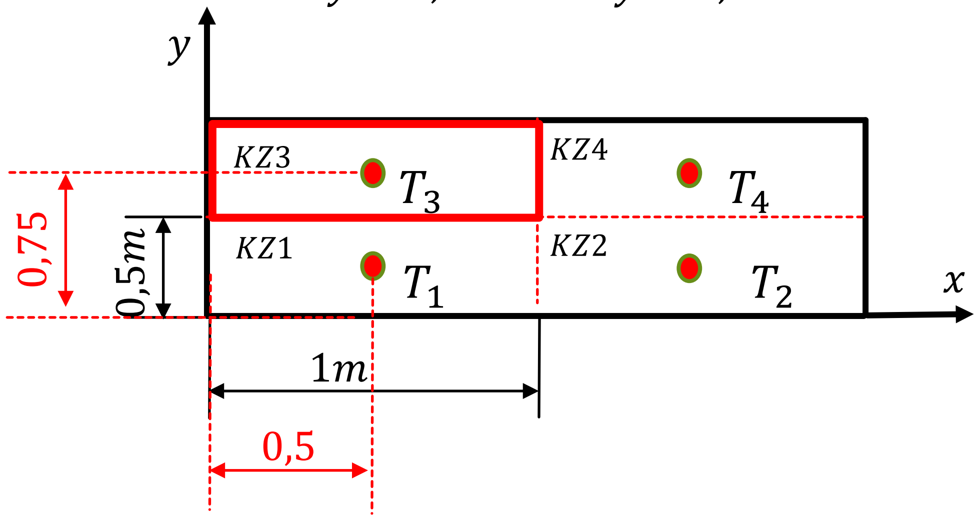
$$\frac{10 - T_2}{0{,}5} \cdot 0{,}5 - \frac{T_2 - T_1}{1} \cdot 0{,}5 + \frac{T_4 - T_2}{0{,}5} \cdot 1 - 150 \cdot 1 = -\frac{40}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}5$$

$$\boxed{0{,}5T_1 - 3{,}5T_2 + 2T_4 = 130}$$

Konačna zapremina 3 (KZ3)

$\Delta x = 1m \qquad x = 0{,}5m$

$\Delta y = 0{,}5m \qquad y = 0{,}75m$




$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e = \frac{T_4 - T_3}{1}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w = \frac{1}{\lambda}200y = \frac{1}{2}200 \cdot 0{,}75 = 75$$ -konturni uslov

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n = \frac{T_n - T_3}{0{,}25} = \frac{100 \cdot 0{,}5 - 10 \cdot 0{,}5^2 - T_3}{0{,}25} = \frac{47{,}5 - T_3}{0{,}25}$$ -konturni uslov

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s = \frac{T_3 - T_1}{0{,}5}$$

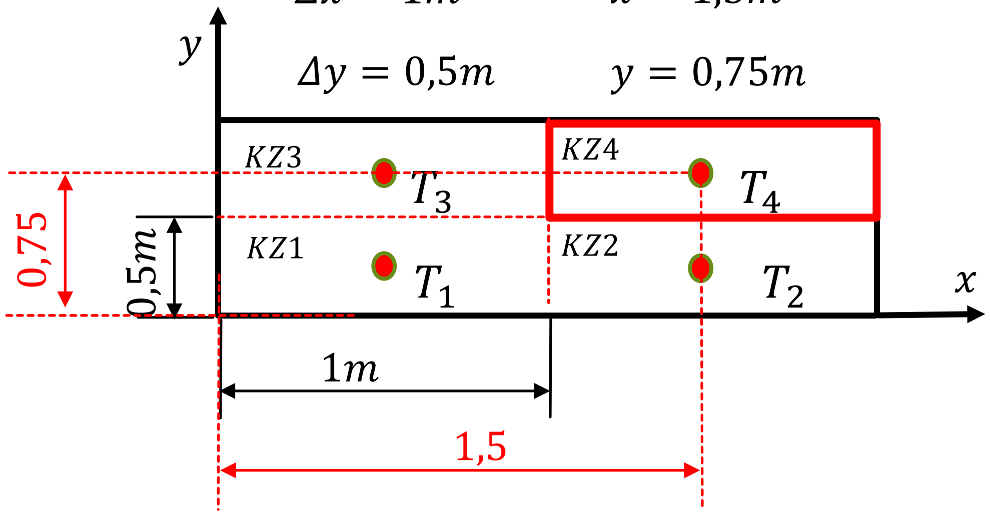
$$\frac{T_4 - T_3}{1} \cdot 0{,}5 - 75 \cdot 0{,}5 + \frac{47{,}5 - T_3}{0{,}25} \cdot 1 + \frac{T_3 - T_1}{0{,}5} \cdot 1 = -\frac{40}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}5$$

$$\boxed{2T_1 - 6{,}5T_3 + 0{,}5T_4 = -162{,}5}$$

Konačna zapremina 4 (KZ4)

$\Delta x = 1m \qquad x = 1{,}5m$

$\Delta y = 0{,}5m \qquad y = 0{,}75m$




$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e = \frac{T_e - T_4}{0{,}5} = \frac{200\cdot 0{,}75 - 40 - T_4}{0{,}5} = \frac{110 - T_4}{0{,}5}$$ -konturni uslov

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w = \frac{T_4 - T_3}{1}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n = \frac{T_n - T_4}{0{,}25} = \frac{100\cdot 1{,}5 - 10\cdot 1{,}5^2 - T_4}{0{,}25} = \frac{127{,}5 - T_4}{0{,}25}$$ -konturni uslov

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s = \frac{T_4 - T_2}{0{,}5}$$

$$\frac{110 - T_4}{0{,}5}\cdot 0{,}5 - \frac{T_4 - T_3}{1}\cdot 0{,}5 + \frac{127{,}5 - T_4}{0{,}25}\cdot 1 - \frac{T_4 - T_2}{0{,}5}\cdot 1 = -\frac{40}{2}\cdot 1\cdot 0{,}5$$

$$\boxed{2T_2 + 0{,}5T_3 - 7{,}5T_4 = -630}$$

$$\begin{bmatrix} -2{,}5 & 0{,}5 & 2 & 0 \\ 0{,}5 & -3{,}5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -6{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 2 & 0{,}5 & -7{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52{,}5 \\ 130 \\ -162{,}5 \\ -630 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{-2{,}5T_1 + 0{,}5T_2 + 2T_3 = 52{,}5}$$

$$\boxed{0{,}5T_1 - 3{,}5T_2 + 2T_4 = 130}$$

$$\boxed{2T_1 - 6{,}5T_3 + 0{,}5T_4 = -162{,}5}$$

$$\boxed{2T_2 + 0{,}5T_3 - 7{,}5T_4 = -630}$$

**Primjer 2.**

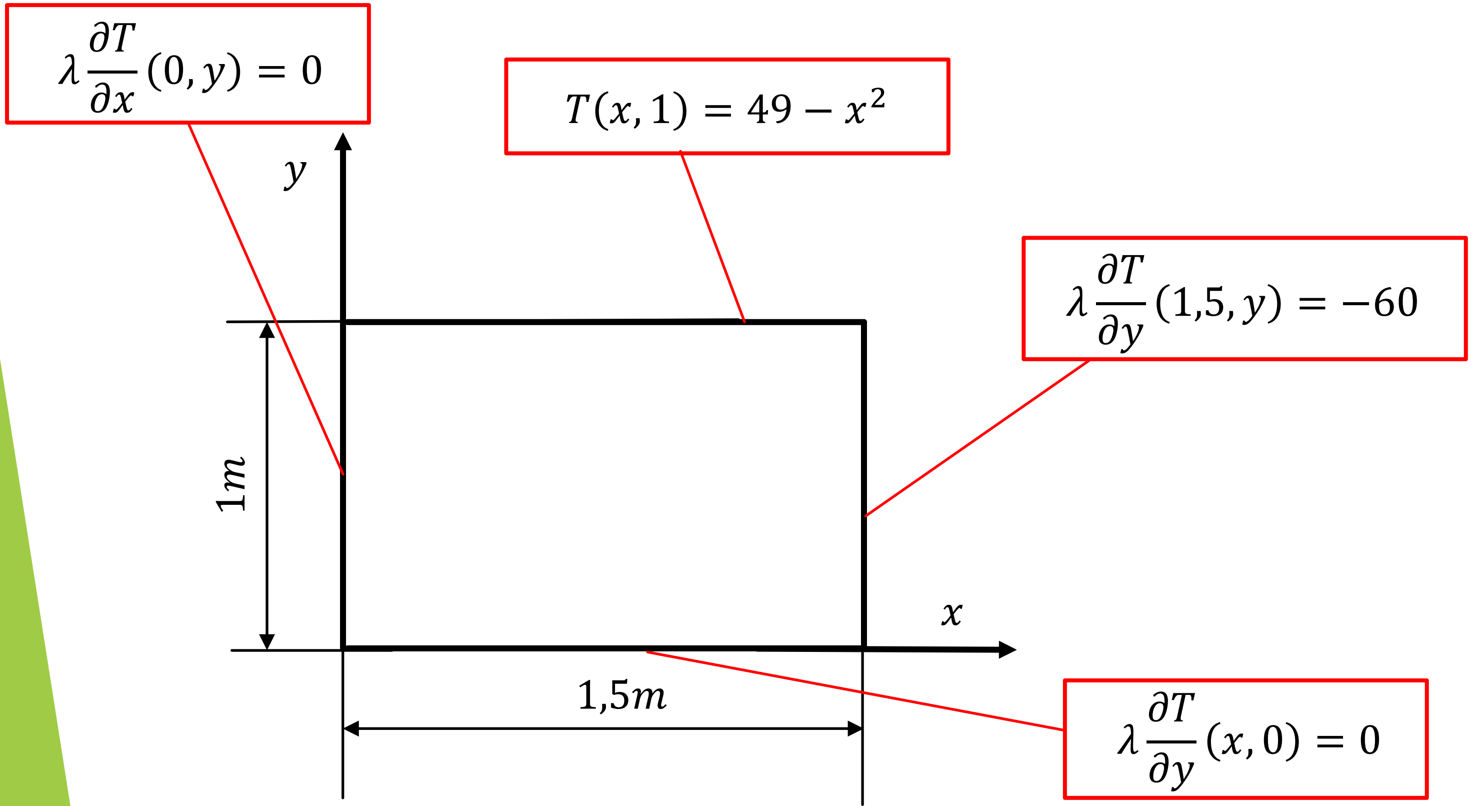
Za tanku homogenu ploču s konstantnim toplotnim izvorom q potrebno je koristeći metodu konačnih zapremina postaviti sistem diskretizovanih jednačina za izračunavanje temperature u čvorovima. Problem diskretizovati sa 3x2 konačne zapremine.

Zadano je: $q = 80\left[\frac{W}{kg}\right], \rho = 1\left[\frac{kg}{m^3}\right], \lambda = 20\left[\frac{W}{mK}\right]$

$\lambda$ -toplotna provodljivost

$q$ -toplotni izvor (ponor)

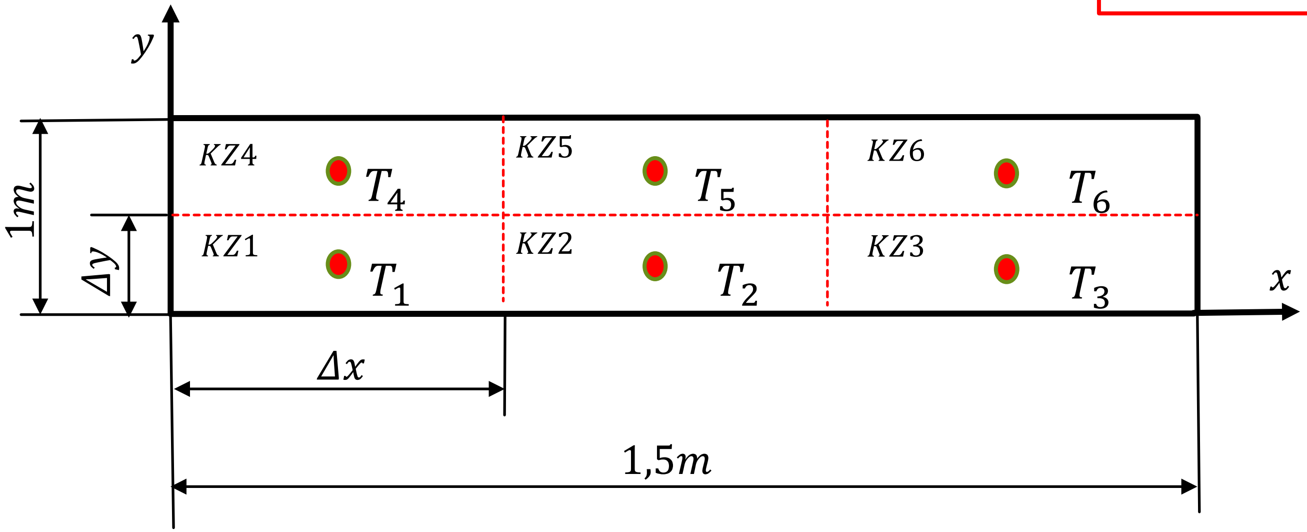
$\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y$ -veličina konačne zapremine




Konturni uslovi su:

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x}(0, y) = 0$$
$$\lambda\frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) = 0$$
$$\lambda\frac{\partial T}{\partial y}(1{,}5, y) = -60$$
$$T(x, 1) = 49 - x^2$$

## Diskretizacija modela



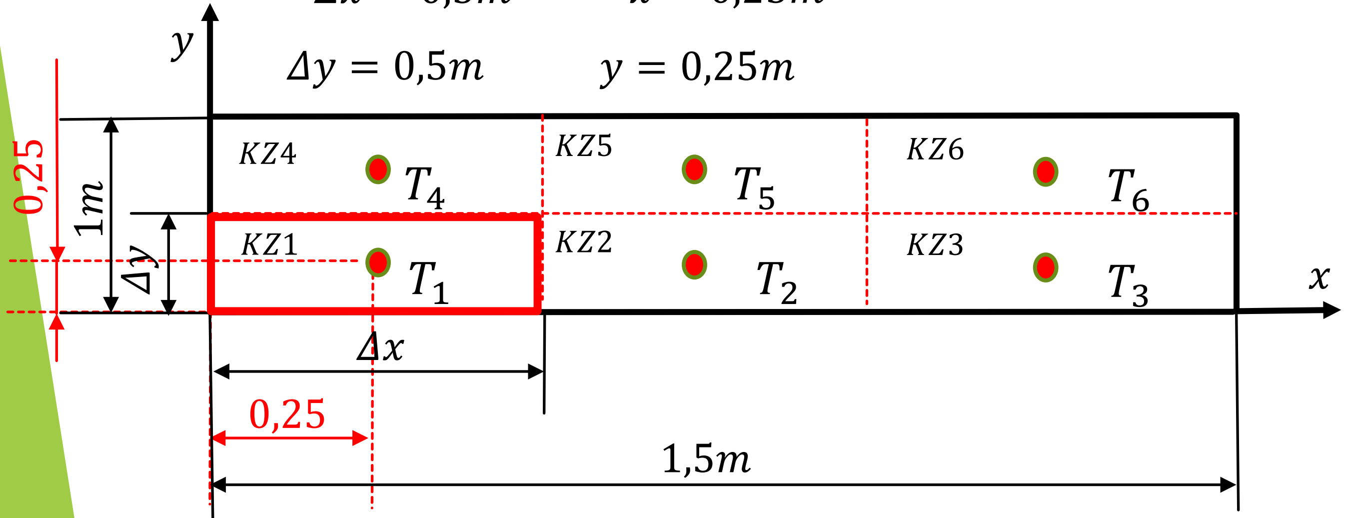

## Jednačina konačne zapremine

$$\boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e \Delta y - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w \Delta y + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n \Delta x - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s \Delta x = -\frac{\rho q}{\lambda}\Delta V}$$

## Konačna zapremina 1 (KZ1)

$\Delta x = 0{,}5m \qquad x = 0{,}25m$

$\Delta y = 0{,}5m \qquad y = 0{,}25m$




$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e = \frac{T_2 - T_1}{0{,}5}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w = 0$$ -konturni uslov

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n = \frac{T_4 - T_1}{0{,}5}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s = 0$$ -konturni uslov

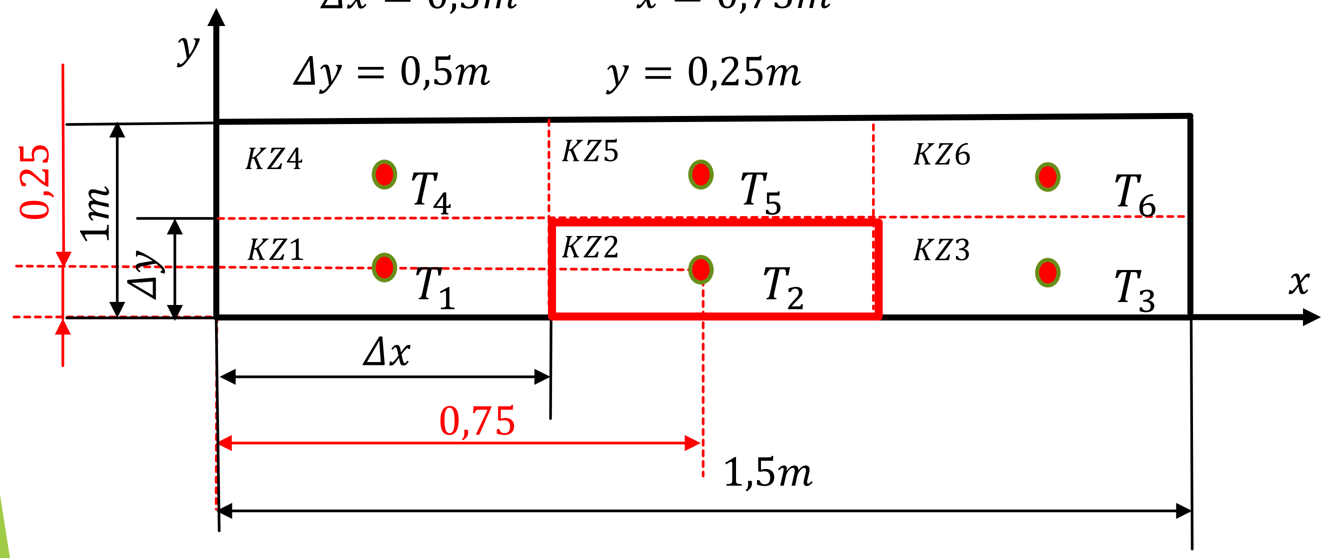
$$\frac{T_2 - T_1}{0,5} \cdot 0,5 + \frac{T_4 - T_1}{0,5} \cdot 0,5 = -\frac{48}{2} \cdot 0,5 \cdot 0,5$$

$$\boxed{-2T_1 + T_2 + T_4 = -1}$$

Konačna zapremina 2 (KZ2)

$\Delta x = 0,5m \qquad x = 0,75m$

$\Delta y = 0,5m \qquad y = 0,25m$




$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e = \frac{T_3 - T_2}{0,5}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w = \frac{T_2 - T_1}{0,5}$$

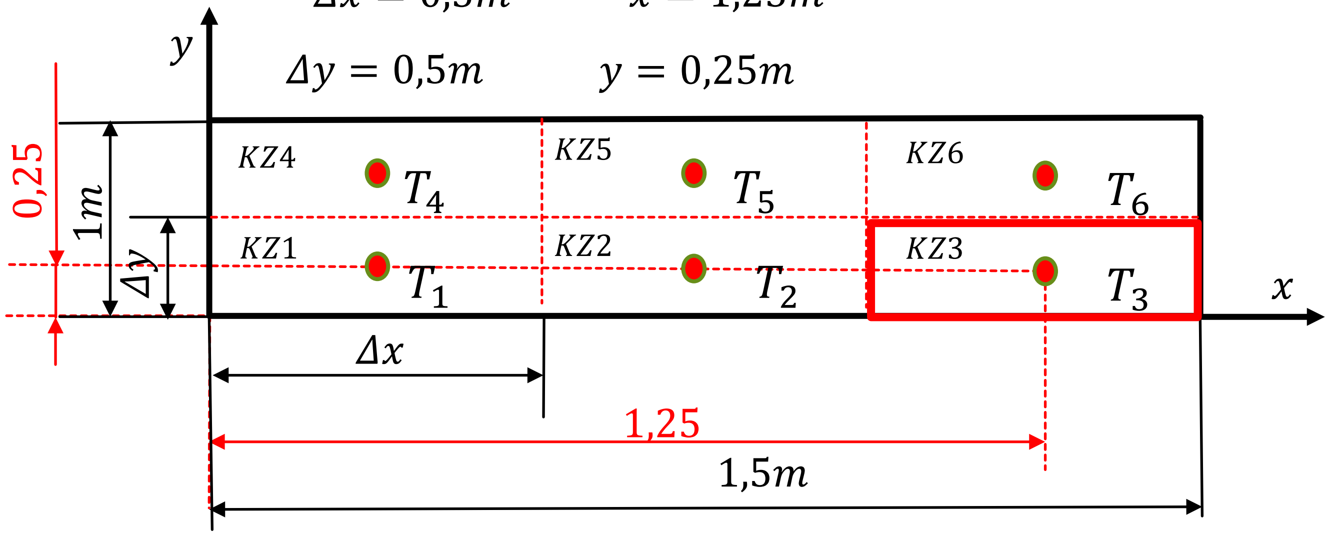
$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n = \frac{T_5 - T_2}{0,5}$$

$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s = 0$ -konturni uslov

$$\frac{T_3 - T_2}{0,5} \cdot 0,5 - \frac{T_2 - T_1}{0,5} \cdot 0,5 + \frac{T_5 - T_2}{0,5} \cdot 0,5 = -\frac{80}{2} \cdot 0,5 \cdot 0,5$$

$$\boxed{T_1 - 3T_2 + T_3 + T_5 = -1}$$

Konačna zapremina 3 (KZ3)




$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e = -\frac{1}{\lambda}60 = -3$$ -konturni uslov

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w = \frac{T_3 - T_2}{0{,}5}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n = \frac{T_6 - T_3}{0{,}5}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s = 0$$ -konturni uslov

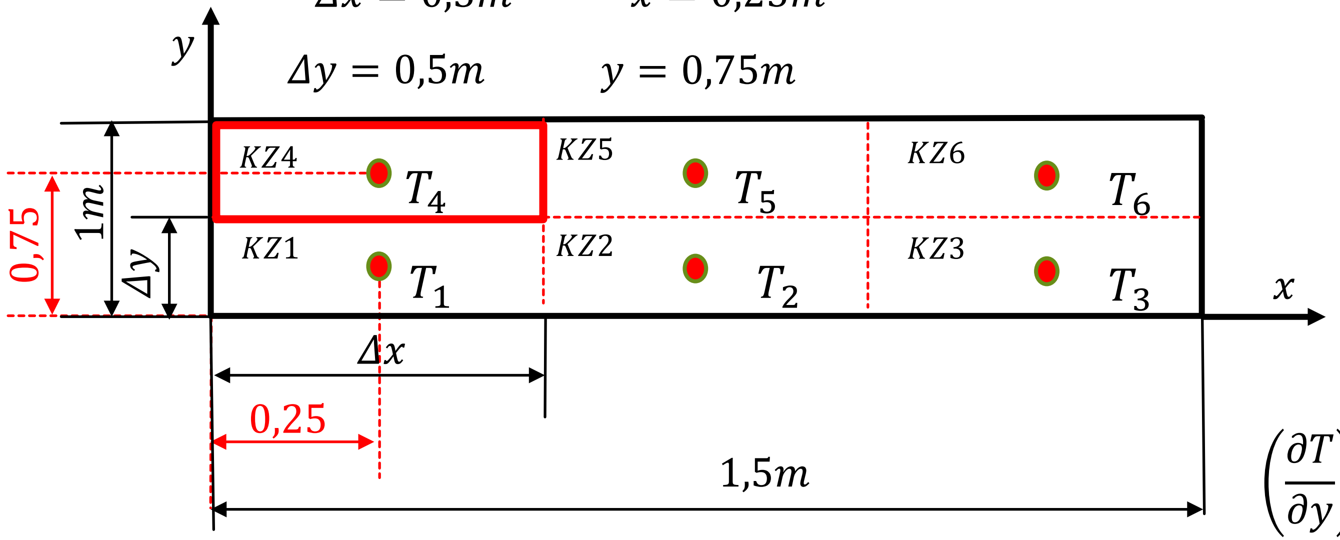
$$-3 \cdot 0{,}5 - \frac{T_3 - T_2}{0{,}5} \cdot 0{,}5 + \frac{T_6 - T_3}{0{,}5} \cdot 0{,}5 = -\frac{80}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5$$

$$\boxed{T_2 - 2T_3 + T_6 = 0{,}5}$$

Konačna zapremina 4 (KZ4)

$\Delta x = 0{,}5m \qquad x = 0{,}25m$

$\Delta y = 0{,}5m \qquad y = 0{,}75m$




$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e = \frac{T_5 - T_4}{0{,}5}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w = 0$$ -konturni uslov

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n = \frac{T_w - T_4}{0{,}25} = \frac{49 - 0{,}25^2 - T_4}{0{,}25} = \frac{48{,}9375 - T_4}{0{,}25}$$ -konturni uslov

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s = \frac{T_4 - T_1}{0{,}5}$$

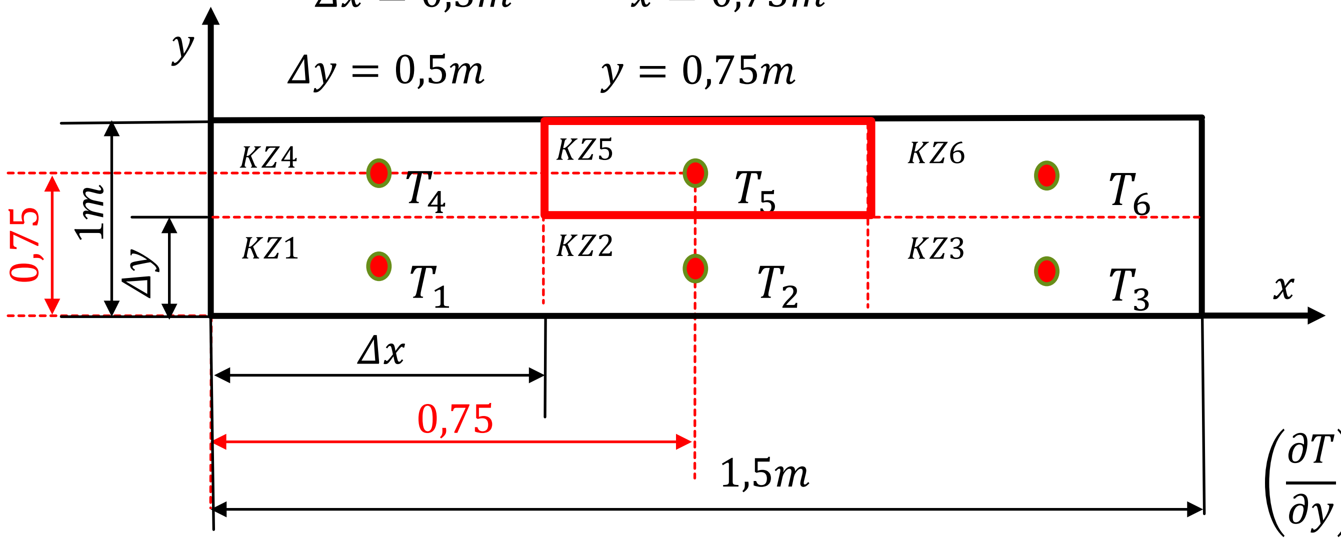
$$\frac{T_5 - T_4}{0{,}5} \cdot 0{,}5 + \frac{48{,}9375 - T_4}{0{,}25} \cdot 0{,}5 - \frac{T_4 - T_1}{0{,}5} \cdot 0{,}5 = -\frac{80}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5$$

$$\boxed{T_1 - 4T_4 + T_5 = -98{,}875}$$

Konačna zapremina 5 (KZ5)

$\Delta x = 0{,}5m \qquad x = 0{,}75m$

$\Delta y = 0{,}5m \qquad y = 0{,}75m$




$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e = \frac{T_6 - T_5}{0{,}5}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w = \frac{T_5 - T_4}{0{,}5}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n = \frac{T_n - T_5}{0{,}25} = \frac{49 - 0{,}75^2 - T_5}{0{,}25} = \frac{48{,}4375 - T_5}{0{,}25}$$ -konturni uslov

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s = \frac{T_5 - T_2}{0{,}5}$$

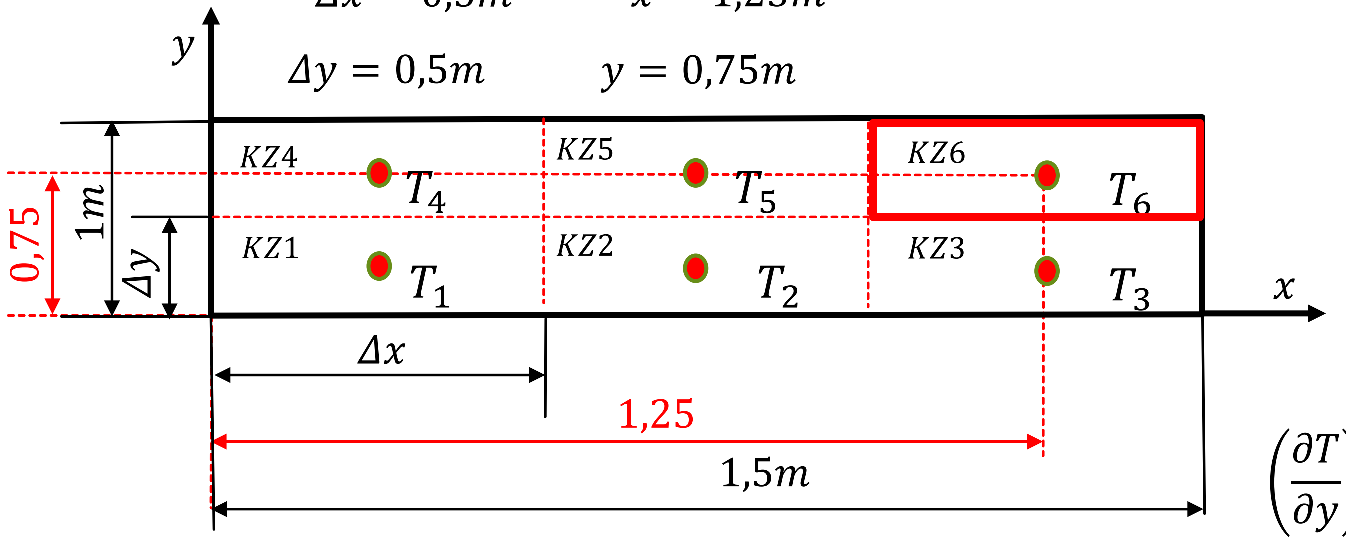
$$\frac{T_6 - T_5}{0{,}5} \cdot 0{,}5 - \frac{T_5 - T_4}{0{,}5} \cdot 0{,}5 + \frac{48{,}4375 - T_5}{0{,}25} \cdot 0{,}5 - \frac{T_5 - T_2}{0{,}5} \cdot 0{,}5 = -\frac{80}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5$$

$$\boxed{T_2 - T_4 - 5T_5 + T_6 = -97{,}875}$$

Konačna zapremina 6 (KZ6)

$\Delta x = 0{,}5m \qquad x = 1{,}25m$

$\Delta y = 0{,}5m \qquad y = 0{,}75m$




$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e = -\frac{1}{\lambda}60 = -3$$ -konturni uslov

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w = \frac{T_6 - T_5}{0{,}5}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n = \frac{T_n - T_5}{0{,}25} = \frac{49 - 1{,}25^2 - T_6}{0{,}25} = \frac{47{,}4375 - T_6}{0{,}25}$$ -konturni uslov

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s = \frac{T_6 - T_3}{0{,}5}$$

$$-3 \cdot 0{,}5 - \frac{T_6 - T_5}{0{,}5} \cdot 0{,}5 + \frac{47{,}4375 - T_6}{0{,}25} \cdot 0{,}5 - \frac{T_6 - T_3}{0{,}5} \cdot 0{,}5 = -\frac{80}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5$$

$$\boxed{T_3 + T_5 - 4T_6 = -94{,}375}$$

$$\boxed{-2T_1 + T_2 + T_4 = -1}$$

$$\boxed{T_1 - 3T_2 + T_3 + T_5 = -1}$$

$$\boxed{T_2 - 2T_3 + T_6 = 0{,}5}$$

$$\boxed{T_1 - 4T_4 + T_5 = -98{,}875}$$

$$\boxed{T_2 - T_4 - 5T_5 + T_6 = -97{,}875}$$

$$\boxed{T_3 + T_5 - 4T_6 = -94{,}375}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0{,}5 \\ -98{,}875 \\ -97{,}875 \\ -94{,}375 \end{bmatrix}$$