Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Mašinski fakultet Istočno Sarajevo

Numeričke metode u inženjerstvu

2. Osnovni matematički modeli u mehanici kontinuuma
2.1 Jednostavni problem polja
2.2 Problemi prenosa toplote

Doc. dr Dejan Jeremić

2. Osnovni matematički modeli u mehanici kontinuuma

2.1 Jednostavni problem polja

Problemi polja su fizikalni problemi koji se često pojavljuju u raznim oblastima inženjerstva i obuhvataju problem teorije elastičnosti (otpornost materijala), problem provođenja toplote, elektromagnetnih polja, vrtložnih strujanja i drugo.
Sve ove probleme moguće je opisati pomoću parcijalne diferencijalne jednačine čiji je opšti oblik za stacionarne probleme prikazan u sledećem obliku

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) = f \qquad i = 1,2,3\ldots \qquad (1)$$

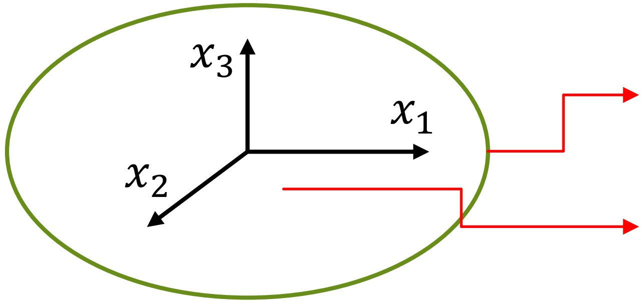
$f = f(x)$ -nepoznata zavisna skalarna veličina

$x = x_i e_i$ -vektor položaja proizvoljne materijalne tačke u Euklidovom prostoru s osnovnim jediničnim vektorom e_i u pravcu Kartezijevih koordinatnih osa x_i

$a = a(x)$
$f = f(x)$ -funkcije nezavisne od ϕ čije fizikalno značenje zavisi od problema koji se opisuje

Relacija (1) vrijedi za neko razmatrano područje zapremine ***V*** ograđeno graničnom površinom *S*, pri čemu je

$$x \rightarrow x_1 \quad y \rightarrow x_2 \quad z \rightarrow x_3$$



granična (konturna) površina *S*

razmatrano područje zapremine ***V***

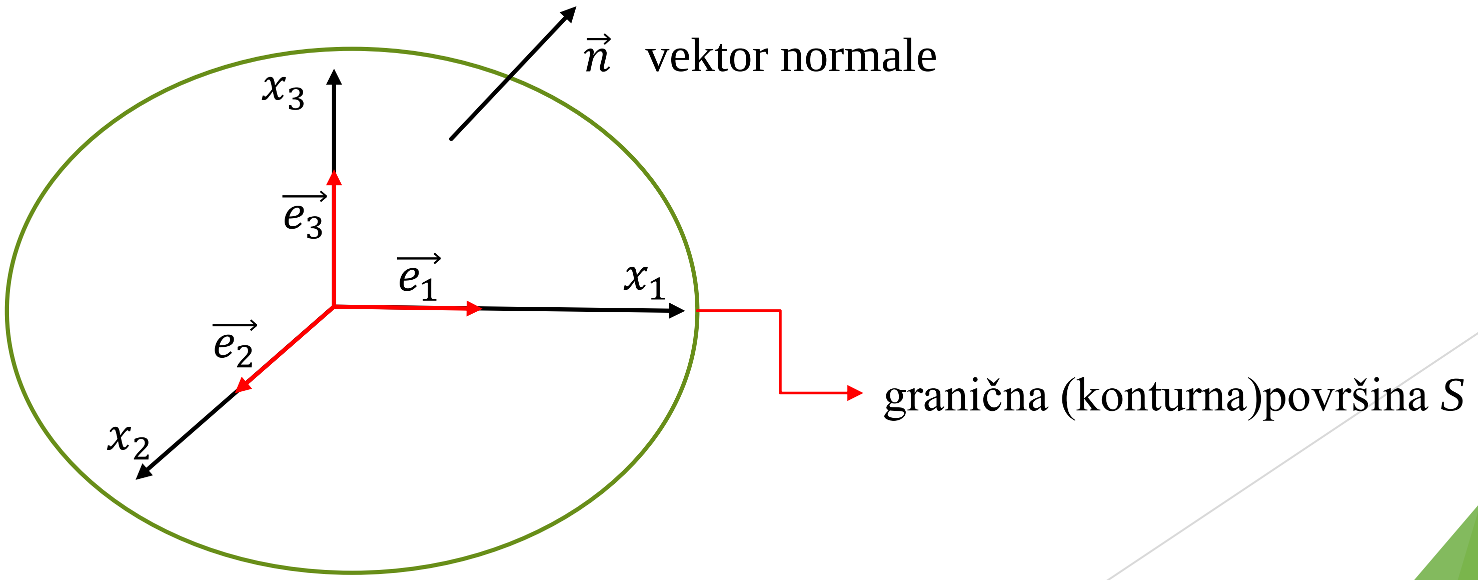
Ako uzmemo da je $a = const.$ i $f = const.$ za trodimenzionalni problem jednačina (1) ima oblik

$$-a\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}\right)=f$$

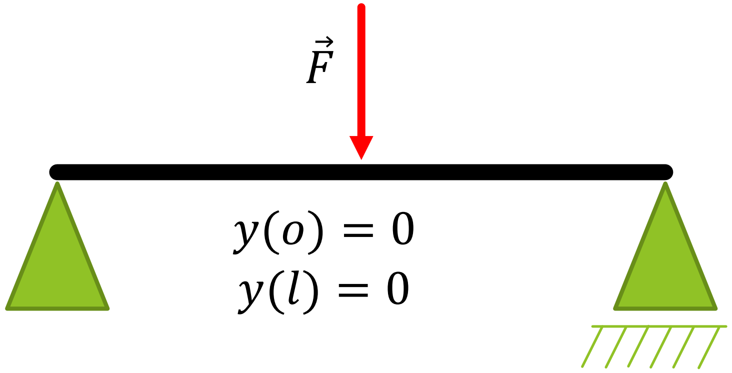
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}=-\frac{f}{a}$$

Kada je problem dvodimenzionalan jednačina (1) ima oblik $\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=-\frac{f}{a}$ ili $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-\frac{f}{a}$

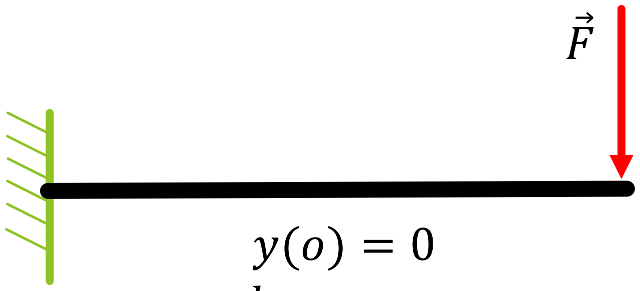
Kada je problem jednodimenzionalan jednačina (1) ima oblik $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=-\frac{f}{a}$



Opštim oblikom parcijalne diferencijalne jednačine (1) definisan je jedan zapreminski problem pri čemu je posmatrana zapremina ograničena plaštom površine S. U svakoj tački te površine definisan je vektor jedinične normale $\vec{n}$.
Da bi se neki problem mogao u potpunosti opisati i riješiti potrebno je duž konturne površine poznavati konturne uslove.Na slici su prikazana prosta greda i konzola za koje su definisani konturni uslovi.



$$y(o) = 0$$
$$y(l) = 0$$



$$y(o) = 0$$
$$\frac{dy}{dx}(0) = 0$$

Sa slike može se uočiti da je na krajevima proste grede u nepokretnom i pokretnom osloncu ugib grede jednak nuli.

U slučaju konzole u poprečnom presjeku koji je uklješten nije dozvoljeno vertikalno pomjeranje i rotacija poprečnog presjeka. To znači da su u uklještenju ugib i nagib jednaki nuli.

Da bi se problem polja mogao u potpunosti opisati i riješiti pomoću diferencijalne jednačine (1), potrebno je duž konturne površine poznavati konturne uslove koji imaju sledeći oblik

$$\phi = \phi_s \qquad (2)$$

$$a\frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i = b_s \qquad (3)$$

ϕ_s, b_s zadane funkcije na površini S

$$\vec{n} = n_1\vec{e_1} + n_2\vec{e_2} + n_3\vec{e_3} \Rightarrow \vec{n} = n_i\vec{e_i} \qquad i = 1,2,3\ldots$$

$$\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}$$ komponente jediničnog vektora vanjske normale na površinu S

Jednačinom (2) definisan je ***Dirichletov konturni uslov.*** U problemu otpornosti materijala ti konturni uslovi mogu se odnositi na pomjeranje ili privi izvod pomjeranja. Zbog toga se Dirichletov konturni uslov naziva i ***geometrijski konturni uslov.***

Jednačinom (3) definisan je ***Neumannov konturni uslov.*** U otpornosti materijala ovaj konturni uslov predstavlja ***prirodni konturni uslov ili konturni uslov sila.***

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = -F \qquad \text{(za konzolu)}$$

Na različitim djelovima mogu biti zadani različiti konturni uslovi pa se u tom slučaju radi o mješovitim konturnim uslovima.

Jednačinom (1) definisan je stacionarni problem, a to se može zaključiti na osnovu toga što u jednačini (1) ne figuriše izvod po vremenu. U slučaju nestacionarnog problema jednačinu (1) je potrebno proširiti nezavisnom varijablom ***vremenom t*** i ona ima sledeći oblik

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right) = f \qquad (4)$$

Ovdje je nepoznata skalarna veličina funkcija vremena $\phi = \phi(x,t)$ pa je potrebno konturnim uslovima, koji takođe mogu zavisiti od vremena, pridružiti sledeći početni uslov

$$\phi = \phi(x,t_0) = \phi_0(x)$$

Nestacionarni problem se često naziva i problem početnih vrijednosti.

Iz opšteg oblika diferencijalne jednačine (1) moguće je izvesti dva posebna oblika koja se često primjenjuju u inženjerskim analizama. U slučaku kada je $a = 1$, jednačina (1) ima oblik

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) = f \qquad \Rightarrow \qquad a = 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} = f$$

(5) ***Poissonova diferencijalna jednačina***

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -f$$

U slučaku kada je $a = 1$ i $f = o$, jednačina (1) ima oblik

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) = f \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = 1 \\ f = o \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} = 0$$

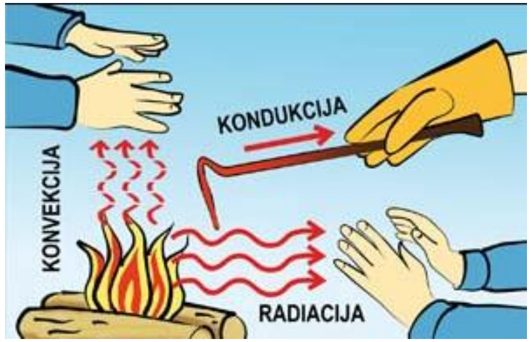
(6) ***Laplaceova diferencijalna jednačina***

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Poissonovom diferencijalno jednačinom u mehanici deformabilnih tijela (otpornosti materijala) opisan je npr. problem aksijalno opterećenog štapa i uvijanja štapa neokruglog poprečnog presjeka. Takođe, moguće je modelirati problem provođenja toplote u čvrstom tijelu. Pomoću Laplaceove jednačine moguće je rješavati problem nestišljivog potencijalnog strujanja u mehanici fluida.

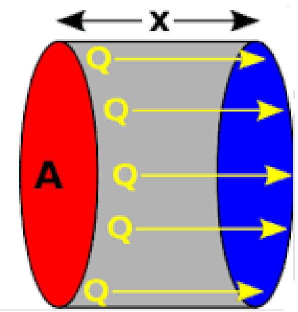
2.2 Problemi prenosa toplote

Poznato je da postoje tri načina prenosa toplote:

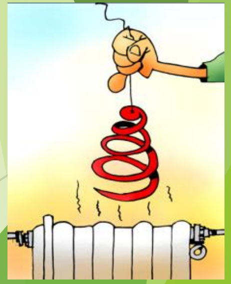


- provođenje (kondukcija),
- konvekcija i
- radijacija (zračenje)

Toplota se prenosi provođenjem kada su dvije tačke posmatranog tijela na različitim temperaturama, pri čemu mediji kroz koji se vrši provođenje može biti neko čvrsto tijelo ili može biti fluid koji se kreće nekom brzinom $\vec{v}$ pri tome se provođenje vrši iz područja više u područje niže temperature.



Konvekcijski prenost toplote je predaja toplote od fluida na neku čvrstu stjenku i obrmuto sa neke čvrste stjenke na fluid.



Prenos toplote zračenjem odvija se tako da se zračenje u obliku elektromagnetnih talasa širi kroz prostor sa površine jednog tijela na drugo i pri tome tome potpuno ili djelimično pretvara u toplotu. Funamentalni zakon prenosa toplote se naziva ***Furijeov*** zakon i on predstavlja osnovnu (konstitutivnu) jednačinu prenosa toplote.

Posmatrajmo sloj nepokretnog gasa ili tečnosti ili sloj čvrstog materijala čiji krajevi, tj. granične površine imaju različite temperature. Kao rezultat spontane težnje ka uspostavljanju termičke ravnoteže dolazi do prenosa toplote u smjeru od toplije prema hladnijoj površini.

U pitanju je molekulski mehanizam, koji je rezultat haotičnog kretanja molekula supstance pri čemu dolazi do prenošenja kinetičke energije u smjeru u kome temperatura opada (sa bržih na sporije molekule). Izuzetak su metali gdje su glavni prenosioci toplote slobodni elektroni.

Količina toplote koja u jednici vremena prođe kroz neku površinu A naziva se ***fluks toplote ili toplotni fluks (W).***
Ako se temperatura u nekom medijumu mijenja samo u jednom koordinatnom pravcu x, za toplotni fluks važi relacija

$$Q = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} [W] \quad \textbf{(7)}$$

Furijeov zakon (Fourie)

A -veličina površine normalne na pravac duž koga se temperatura mijenja (x osa)

$\lambda \left[\frac{W}{mK}\right]$ -koeficijent toplotne provodljivosti sredine

Parcijalni izvod ukazuje na to da u opštem slučaju pretpostavljamo nestacionaryn prenos toplote, tj. da temperatura zavisi od vremena t.

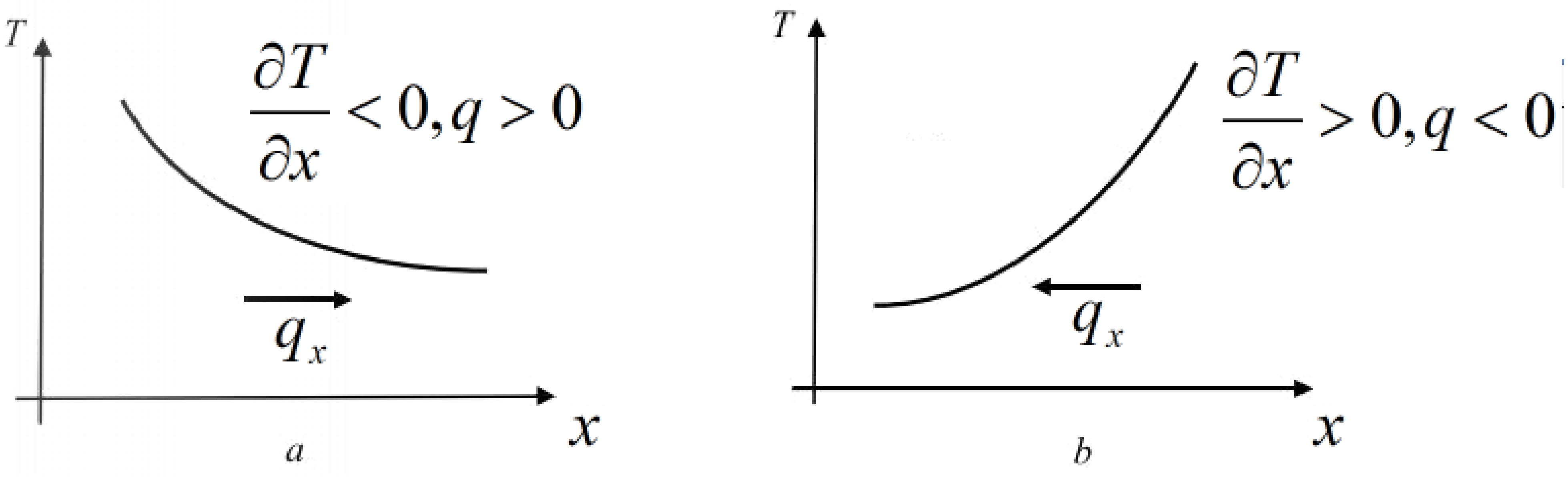
$$T = T(x, t)$$

Iz jednačine (7) dobijamo specifični toplotni fluks ili gustinu toplotnog fluksa q_x.

$$q_x = \frac{Q}{A} = \frac{-\lambda A \frac{\partial T}{\partial x}}{A} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \left[\frac{W}{m^2}\right] \quad \textbf{(8)}$$

gustina toplotnog fliksa

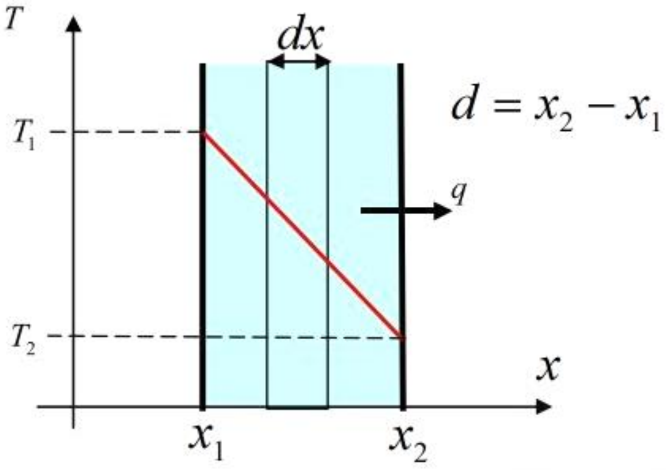
Jednačina (8) predstavlja jednodimenzionalni oblik provođenja toplote pri čemu λ zavisi od vrste materijala.



Smjer specifičnog toplotnog fluksa

Znak – u jednačini (8) daje informaciju o smjeru provođenja toplote, tj. o smjeru toplotnog fluksa koji je vektorska veličina. Pozitivna brojna vrijednost toplotnog fluksa znači da je njegov smjer jednak pozitivnom smjeru x ose (slika a), a ako smo dobili negativnu vrijednost, znači da je njegov smjer suprotan od usvojenog pozitivnog smjera x ose (slika b).

Posmatrajmo stacionarno provođenje toplote kroz ravan zid, debljine d, čija se jedna površina (A) nalazi na temperaturi T_1 , a druga na temperaturi T_2 .



Temperaturni profil pri stacionarnom provođenju toplote kroz zid

Ako pretpostavimo da se toplotna provodljivost zida ne mijenja sa temperaturom (λ=const.) i ako unutar zida uočimo beskonačno tanak sloj debljine dx, pošto je proces stacionaran, ulazni toplotni fluks jednak je izlaznom:

$$q(x)A = q(x + dx)A \qquad \textbf{(9)}$$

Iz izraza (9) slijedi

$$q = const.$$
$$x_1 \le x \le x_2$$

Uz pretpostavku da je specifični toplotni kapacitet fluida konstantan, iz jednačine održanja energije izvodi se sledeća jednačina prenosa toplote

$$\frac{\partial(\rho_{cp}T)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho_{cp} v_i T - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) = \pm\rho q \qquad \textbf{(10)}$$

$$\frac{\partial(\rho_{cp}T)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho_{cp}v_iT - \lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) = \pm\rho q \qquad \textbf{(10)}$$

$q\left[\frac{W}{kg}\right]$ -toplotni izvor (ponor)

$c_p\left[\frac{J}{kgK}\right]$ -specifični toplotni kapacitet

ρ -gustina

v_i -brzina kretanja posmatrane tačke fluida

Fokusiraćemo se na stacionarni problem i na prenos toplote u čvrstom tijelu kod koga je brzina svake elementarne čestice jednaka nuli i na osnovu toga jednačina (5) poprima sledeći oblik

$$v_i = 0 \Rightarrow \quad -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) = \pm\rho q \qquad \textbf{(11)}$$

Jednačinom (11) prikazan je matematički model prenosa toplote u čvrstom tijelu pri čemu se polje temperature smatra stacionarnim, tj. nepromjenjivim u toku vremena.