Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Mašinski fakultet Istočno Sarajevo

Numeričke metode u inženjerstvu

3. Rješavanje problema u mehanici deformabilnih tijela

3.1 Matematički model aksijalno opterećenog štapa

3.2 Matematički model grede opterećene na savijanje

Doc. dr Dejan Jeremić

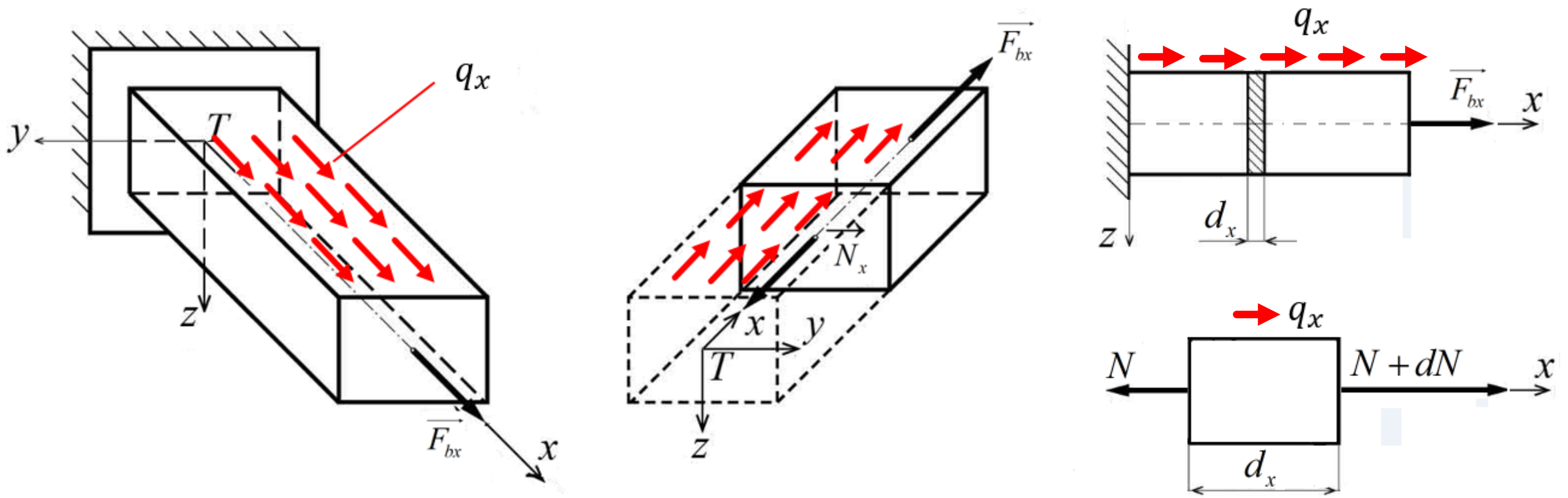
3. Rješavanje problema u mehanici deformabilnih tijela

3.1 Matematički model aksijalno opterećenog štapa

Kod aksijalnog naprezanja spoljnje opterećenje djeluje na konstruktivni element (štap) na takav način da u poprečnom presjeku od presječnih sila imamo samo aksijalnu (podužnu) silu N_x .

Posmatrajmo štap koji je na svom kraju opterećen podužnom centričnom silom F_{bx} i ravnomjerno raspoređenim (kontinualnim) opterećenjam q_x . To znači da se napadna tačka sile F_{bx} nalazi u težištu poprečnog presjeka štapa i da joj se pravac dejstva poklapa sa podužnom *x* osom štapa.

Dekartov koordinatni sistem ***(x, y, z)*** postavili smo tako da mu je koordinatni početak u težištu poprečnog presjeka štapa i osa *x* se poklapa sa podužnom osom štapa.
Lako je uočiti da napadna linije sile F_{bx} prolazi kroz koordinatni početak i da je njena projekcija na ose ***y*** i ***z*** jednaka nuli. Takođe sila ne pravi moment ni za jednu osu. To znači da od šest statičkih uslova ravnoteže egzistira samo jedan, dok su svi ostali identički jednaki nuli. Od svih šest presječnih sila egzistira samo podužna (aksijalna) sila N_x .

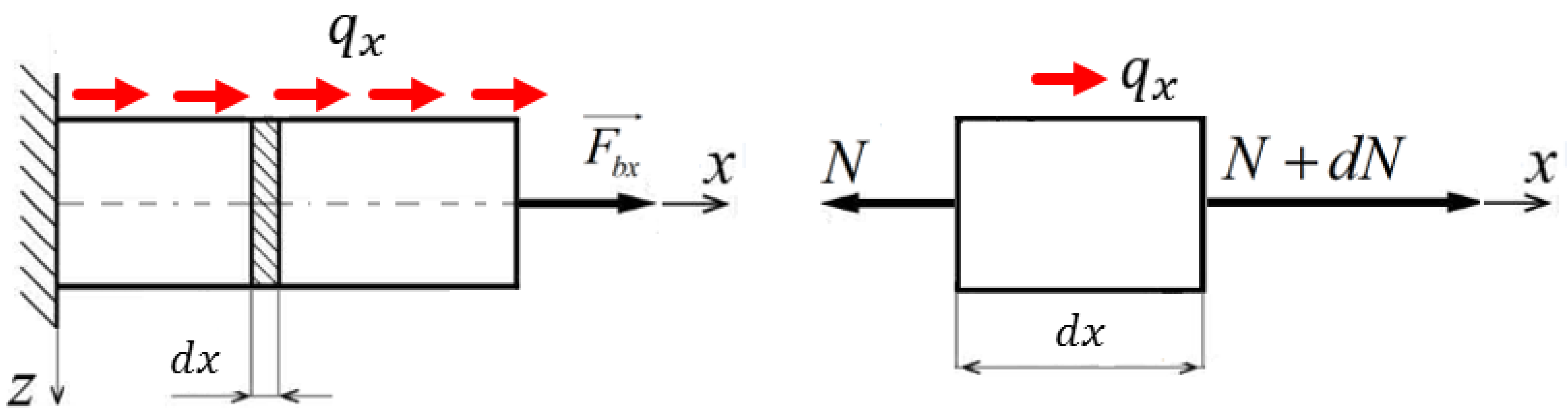


$F \rightarrow F_{bx}$

b -kontura (boundar)

$q_x = const.$

Ako je štap opterećen silom čija je napadna tačka u težištu, a napadna linija se poklapa sa podužnom osom štapa, u proizvoljnom poprečnom presjeku će se javiti samo jedna presječna sila i to aksijalna (podužna) sila N_x . Tada se radi o aksijalnom (podužnom) naprezanju. U slučaju kada bi napadna tačka sile bila u nekoj drugoj tački poprečnog presjeka (ne u težištu T) od presječnih sila javili bi se još i momenti savijanja M_y i M_z i ne bi mogli govoriti o aksijalnom naprezanju. Kada je napadna tačka sile u težištu govorimo o centričnom zatezanju ili pritisku, a kada je napadna tačka van težišta govorimo o ekscentričnom zatezanju ili pritisku.



elementarni djelić

Napravimo jedan zamišljeni presjek štapa sa ravni normalnom na podužnu osu štapa i od presječnih sila ucrtajmo samo N_x . Kao što smo već zaključili od šest statičkih uslova ravnoteže egzistira samo onaj koji govori o ravnoteži svih sila u pravcu ***x*** ose.

$$\sum x_i = -N + N + dN + q_x \cdot dx = 0 \qquad (3.1)$$

$$dN + q_x \cdot dx = 0 / \cdot \frac{1}{dx}$$

$$\frac{dN}{dx} = -q_x \qquad (3.2)$$

Veličina deformacije čvrstog tijela zavisi od intenziteta spoljnjeg opterećenja kao i od materijala čvrstog tijela. Matematički izraz koji povezuju napone i deformacije se zove konstitutivni zakon. Pomoću konstitutivnog zakona se opisuje ponašanje materijala čvrstog tijela pod dejstvom spoljnjeg opterećenja. Da bi se došlo do konstitutivnog zakona potrebno je eksperimentalno istraživanje kojim se dolazi do mehaničkih karakteristika materijala kojima se u konstitutivnom zakonu povezuju naponi i deformacije.

Zavisnost između napona i deformacije u linearno elastičnom području data je u obliku sljedećeg konstitutivnog zakona

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

(za slučaj aksijalnog opterećenja duž ***x*** ose)

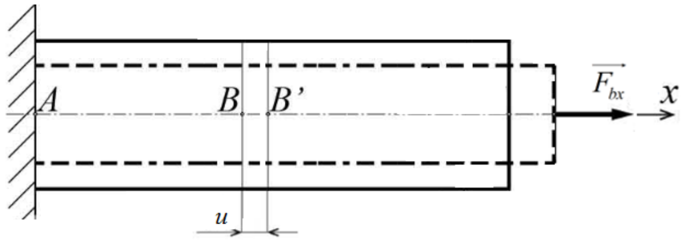
Koristeći izraz za normalni napon $\sigma_x = \dfrac{N}{A}$ i izraz (3.2) dobijamo

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$

$$\sigma_x = E \cdot \frac{du}{dx}$$

$$E \cdot \frac{du}{dx} = \frac{N}{A}$$

$$N = AE \cdot \frac{du}{dx}$$



dilatacija u pravcu ***x*** ose

$$\frac{dN}{dx} = AE \cdot \frac{d^2u}{dx^2}$$

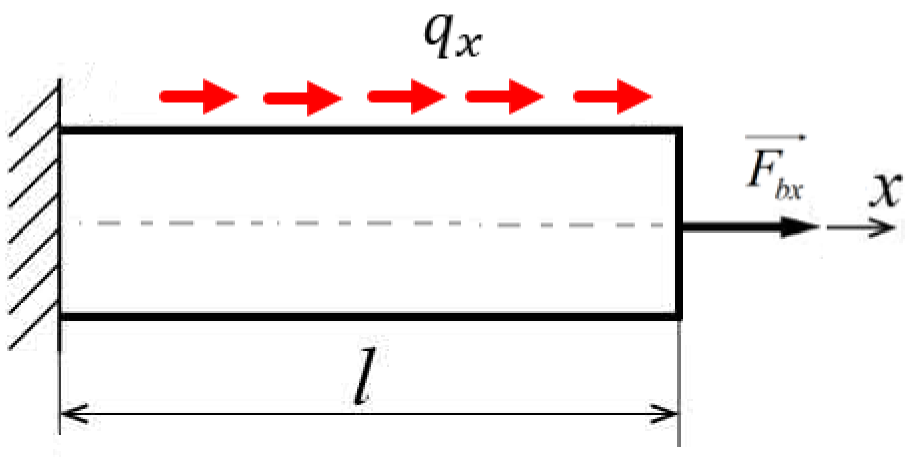
$$-q_x = AE \cdot \frac{d^2u}{dx^2}$$

$$AE \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + q_x = 0 \qquad (3.3)$$

$$AE \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + q_x = 0 \qquad (3.3)$$

Diferencijalna jednačina aksijalno opterećenog štapa
Poissonova diferencijalna jednačina drugog reda

Pošto je diferencijalna jednačina kojom je definisan matematički problem aksijalno opterećenog štapa drugog reda potrebno je definisati dva konturna uslova.



$$\boxed{\begin{array}{c} u(x) = 0 \\ x = 0 \\ u(0) = 0 \end{array}}$$

-geometrijski ***(Dirichletov)*** konturni uslov ili konturni uslov pomaka

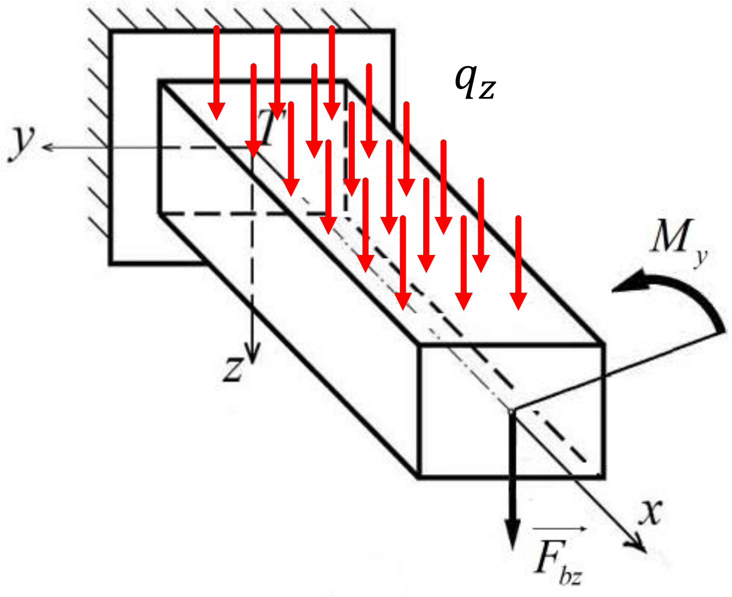
$$\boxed{\begin{array}{c} N = F_{bx} \\ N = AE \cdot \dfrac{du}{dx} \\ AE\dfrac{du}{dx} = F_{bx} \end{array}}$$

-prirodni ***(Neumannov)*** konturni uslov ili konturni uslov sila

3.2 Matematički model grede opterećene na savijanje

Za pravolinijski element konstrukcije koji je izložen dejstvu spoljnjeg opterećenja upravnog na njegovu podužnu osu i dejstvu spregova sila koje su paralelne sa podužnom osom kažemo da je opterećen na savijanje. Ovakve pravolinijske elemente zovemo gredama.

Posmatrajmo konzolu koja je opterećena spregom intenziteta M_y, koncentrisanom silom F_{bz} i ravnomjerno raspoređenim (kontinualnim) opterećenjam q_z.



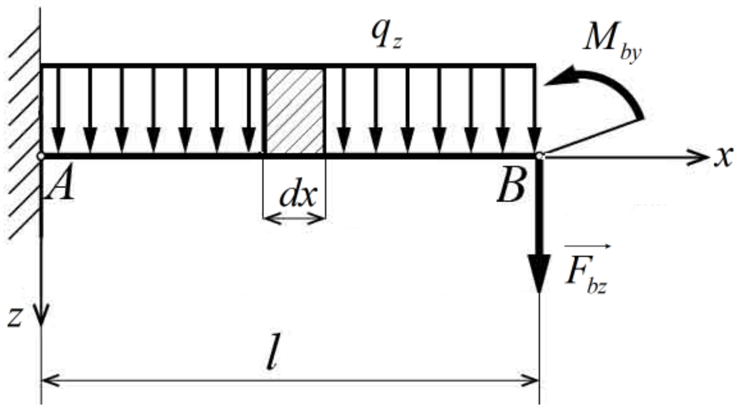
$$q_z = const.$$

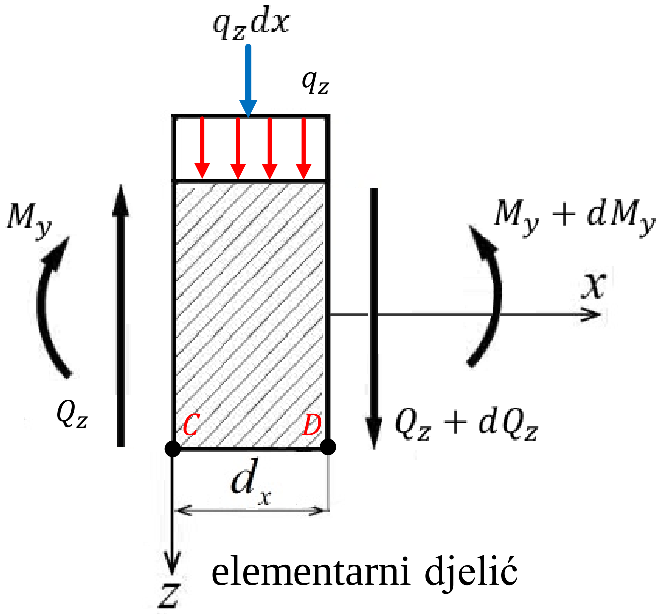
$x \rightarrow u$

$y \rightarrow v$ -obilježavanje pomjeranja duž osa

$z \rightarrow w$

Napravili jedan zamišljeni presjek grede sa ravni normalnom na podužnu osu x.





elementarni djelić

$Q_z \rightarrow F_T \rightarrow F_{bz}$ -transferzalna sila

$M_y \rightarrow M \rightarrow M_{by}$ -moment savijanja

Iz statičkih uslova ravnoteže za elementarni djelić dobijamo

$$\sum z_i = -\cancel{Q_z} + \cancel{Q_z} + dQ_z + q_z\, dx = 0$$

$$\frac{dQ_z}{dx} = -q_z \qquad (3.4)$$

$$\sum M_D = -\cancel{M_y} + \cancel{M_y} + dM_y + \cancelto{0}{q_z dx \frac{dx}{2}} - Q_z dx = 0$$

$$d^2(x) \ll dx$$

$$dM_y - Q_z dx = 0$$

$$dM_y = Q_z dx$$

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z \qquad (3.5)$$

Ako izraz (3.5) uvrstimo u izraz (3.4) dobijamo

$$\frac{d^2M_y}{dx^2}=\frac{dQ_z}{dx}$$

$$\frac{d^2M_y}{dx^2}=-q_z \quad (3.6)$$

Navedeni izrazi $\frac{dF_{T(z)}}{dx}=-q_z \Rightarrow F_T=\frac{dM}{dx} \Rightarrow \boxed{-q_z=\frac{d^2M}{dx^2}}$ predstavlja vezu između napadnog momenta, transferzalne sile i specifičnog opterećenja.

Koristeći diferencijalnu jednačinu eleastične linije dobijamo

$$EI_y\frac{d^2w}{dx^2}=-M_y \quad (3.7)$$

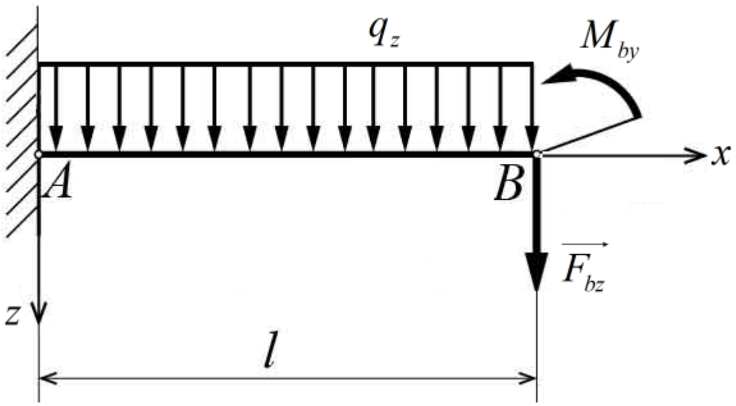
$$EI_y\frac{d^4w}{dx^4}=-\frac{d^2M_y}{dx^2}$$

$$EI_y\frac{d^4w}{dx^4}=q_z$$

$$EI_y\frac{d^4w}{dx^4}-q_z=0 \quad (3.8)$$

Diferencijalna jednačina savijanja grede

Pošto je diferencijalna jednačina kojom je definisan matematički model savijanja grede četvrtog reda potrebna su nam četiri konturna uslova da bismo u potpunosti riješili posmatrani problem.



$I \quad \boxed{w(0) = 0}$

$II \quad \boxed{\frac{dw}{dx}(0) = 0}$

-geometrijski ***(Dirichletov)*** konturni uslov ili konturni uslov pomaka

$III \quad \boxed{EI_y \frac{d^2w}{dx^2}(l) = -M_{by}}$

-prirodni ***(Neumannov)*** konturni uslov ili konturni uslov sila i momenta

$IV \quad \boxed{EI_y \frac{d^3w}{dx^3}(l) = -F_{bz}}$