Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Mašinski fakultet Istočno Sarajevo

Numeričke metode u inženjerstvu

4. Metoda težinskog reziduala

4.1 Primjena Galerkinogov metoda kod aksijalno opterećenog štapa

Doc. dr Dejan Jeremić

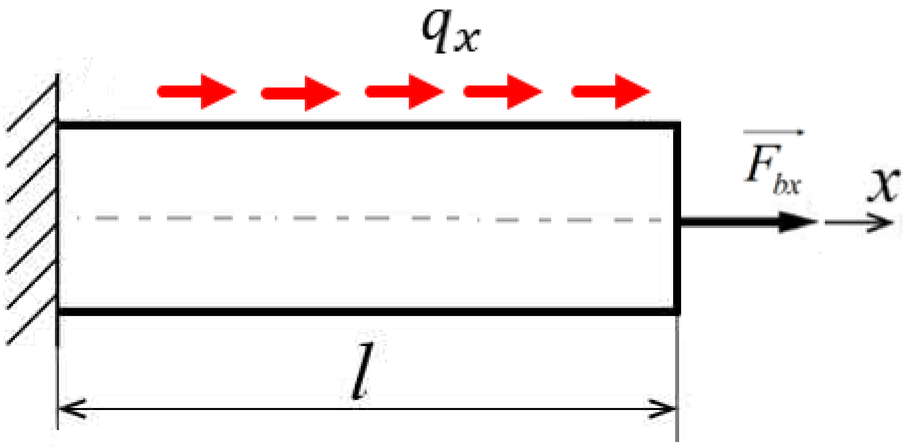
4.1 Metoda težinskog reziduala-Galerkinova metoda

Za rješavanje problema graničnih vrijednosti koriste se diferencijalna i varijacijska formulacija. Diferencijalna formulacija se temelji na izvođenju diferencijalnih jednačina koje opisuju problem u određenom području, pri čemu stacionarno rješenje zavisi od graničnih uslova. Rješenje u svakoj tački posmatranog područja zavisi od vrijednosti koje su zadate u tačkama na ivicama. U mehanici deformabilnih tijela Dirichletovi granični uslovi su granični uslovi pomaka ili geometrijski granični uslovi, a Neumannovi granični uslovi su prirodni granični uslovi ili granični uslovi sila.
Potrebno je naći nepoznatu funkciju koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu i pridružene granične uslove korišćenjem metode direktne integracije i metode za dobijanje približnog rješenja.
Tačno rješenje direktim integraljenjem diferencijalne jednačine moguće je dobiti samo za ograničen broj jednostavnih problema pa se mnogo češće koriste približni postupci rješavanja kao što su metoda težinskog reziduala i metoda konačnih razlika.

Galerkinovu metodu je 1915. godine uveo ruski matematičar Boris Grigoryevich Galerkin. Ova metoda je bazirana na metodi težinskih rezidula. Činjenica da nije potrebno pisati jednačinu u varijacionoj formi, ovoj metodi daje prednost u odnosu na Rayleigh-Ricovu metodu, i omogućava da Galerkinova metoda bude primjenjena na mnogo širu klasu problema.

Galerkinova metoda predstavlja numeričku metodu za rješavanje deferencijalnih jednačina kojima su opisani samo neki inženjerski problemi. Ova metoda predstavlja specijalni slučaj metode težinskog reziduala (ostatka) R.

Radi boljeg razumijevanja, metodu težinskog reziduala ćemo koristiti pri rješavanju jednodimenzionalnih problema. Neka je jednodimenzionalni problem opisan Poissonovom diferencijalnom jednačinom koja opisuje aksijalno opterećen štap.



$$AE \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + q_x = 0$$

$$0 \leq x \leq l$$

Zadani granični uslovi su:

$x = 0 \qquad u(0) = 0$ -geometrijski ***(Dirichletov)*** konturni uslov ili konturni uslov pomaka

$x = l \qquad AE\dfrac{du}{dx} = F_{bx}$ -prirodni ***(Neumannov)*** konturni uslov ili konturni uslov sila

Kod Galerkinove metode potrebno je prvo pretpostaviti neko rješenje u obliku funkcije pomaka

$$\bar{u}(x) = f_i(x)a_i$$

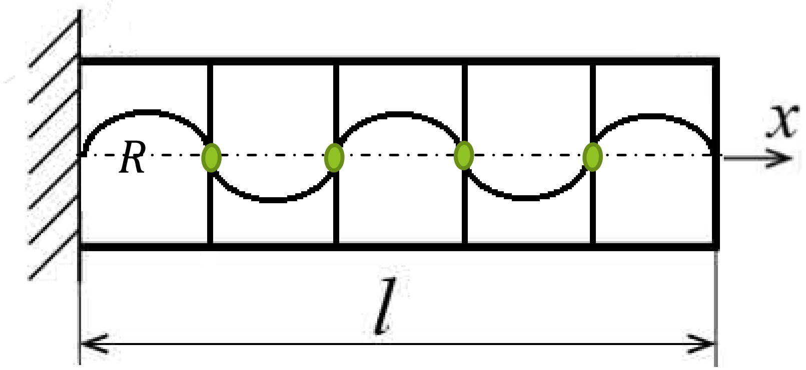
a_i -nepoznati koeficijent

$$\bar{u}(x) = xa_1 + x^2a_2 + \ldots x^ia_i$$

$i = 1,2,3..n$

$$\bar{u}(x) = a_1\sin x + a_2\sin^2 x + \ldots . a_i\sin^i x$$

Svakom nepoznatom koeficijentu a_i pridružena je funkcija f_i koju je potrebno tako odabrati da su granični uslovi zadovoljeni. U tačkama rješenje je tačno i rezidual ***R*** je jednak nuli.



$$\int_0^l R dx = 0$$

U području između tački rješenje je približno i rezidual ***R*** je različit od nule.

$$R = AE\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + q_x \neq 0 \qquad (4.1)$$

Zadatak metode težinskog reziduala je da odredi nepoznate koeficijente a_i na taj način da rezidual (ostatak) ***R*** u razmatranom području ***V*** ima dovoljno malu vrijednost i na taj način dobijamo tačnije rješenje. Uvođenjem nezavisnih težinskih funkcija, veličine a_i izračunavaju se iz uslova da je težinska prosječna vrijednost reziduala ***R*** u području ***V*** jednaka nuli.

$$\int_V WRdV = 0 \qquad (4.2)$$

W -matrica težinskih funkcija

Ako je matrica težinskih funkcija W_i jednaka pretpostavljenoj funkciji f_i , tj. $W_i = f_i$ za $i = 1,2,3\ldots, n$ govorimo o Galerkinovoj metodi.

U skladu sa Galerkinovom metodom za koju vrijedi da je $W_i = f_i(x)$ težinska prosječna vrijednost reziduala (ostatka) R u području $0 \leq x \leq l$ jednaka je

$$\int_0^l \left(AE \frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + q_x \right) f_i dx = 0 \qquad i = 1,2,3.., n$$

$$\int_0^l \left(AE \frac{d^2\bar{u}}{dx^2} \right) f_i dx + \int_0^l q_x f_i dx = 0 \qquad (4.3)$$

Da bismo dobili model pogodan za rješavanje problema potrebno je na diferencijalnoj jednačini (4.3) provesti postupak parcijalne integracije za prvi integral pri čemu dobijamo sledeći izraz

$$\left[AE \frac{d\bar{u}}{dx} f_i \right]_0^l - \int_0^l \left(AE \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{df_i}{dx} \right) dx + \int_0^l q_x f_i dx = 0$$

$$\int_0^l \left(AE \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{df_i}{dx} - q_x f_i \right) dx - \left[f_i AE \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_0^l = 0$$

$$\boxed{\int_a^b p dq = [p \cdot q]_a^b - \int_a^b q dp}$$

Postupak parcijalne integracije kojim se potencijal d smanjuje za jedan $d^2 \rightarrow d$.

$$\int_0^l \left(AE \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{df_i}{dx} - q_x f_i \right) dx - \left[f_i AE \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_0^l = 0 \quad (4.4)$$

Primjenom graničnihi uslova za aksijalno opterećen štap prethodna jednačina prelazi u oblik

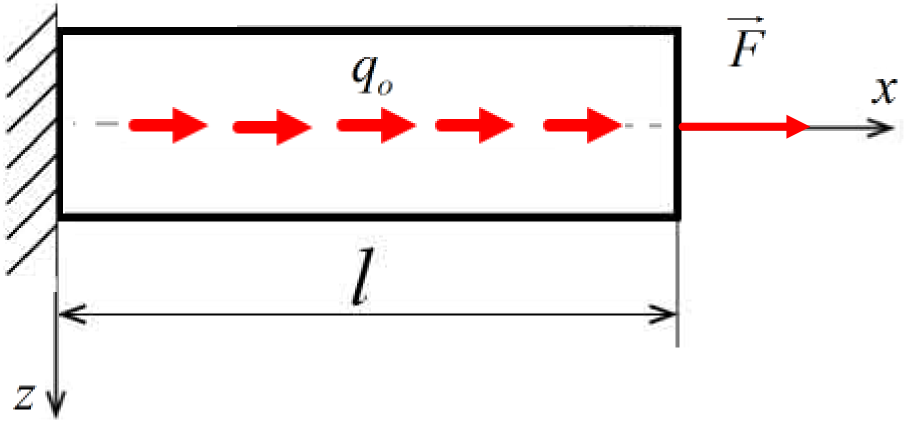
$$\int_0^l \left(AE \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{df_i}{dx} - q_x f_i \right) dx - [f_i F_{bx}]_0^l = 0 \quad (4.5)$$ -opšti izraz Galerkinovog metoda za aksijalno opterećen štap

Nakon parcijalne integracije red derivacije pod integralom se smanjio, a granični uslovi sila su uklljučeni u formulaciju. Na taj način funkcije f_i sada moraju samo zadovoljiti geometrijske granične uslove.

Primjer 1.

Za aksijalno opterećen štap konstantne aksijalne krutosti $AE = const.$, koji je opterećen kao na slici, potrebno je primjenom Galerkinove metode odrediti pomjeranje slobodnog kraja. Za funkciju pomaka pretpostaviti funkciju u obliku polinoma drugog stepena

$$\bar{u}(x) = a_1 x + a_2 x^2$$



Zadano je:

$$AE = const.$$
$$q_0 = const.$$
$$F = \frac{q_0 l}{2}$$

Zadani problem osno opterećenog štapa opisan je jednodimenzionalnom Poissonovom diferencijalnom jednačinom.

$$AE\frac{d^2u}{dx^2} + q_x = 0$$

$$q_x = q_0$$

Kako bismo primjenili Galerkinog metod potrebno je prvo da provjerimo da li pretpostavljena funkcija zadovoljava granične uslove.

Zadani granični uslovi su:

$x = 0 \quad \bar{u}(0) = a_1 0 + a_2 0^2 = 0 \quad \bar{u}(0) = 0$ -geometrijski ***(Dirichletov)*** konturni uslov ili konturni uslov pomaka

$x = l \quad AE\dfrac{du}{dx}(l) = F$ -prirodni ***(Neumannov)*** konturni uslov ili konturni uslov sila

Funkcija pomaka zadovoljava geometrijske i prirodne konturne uslove.

Za rješavanje ovog problema koristićemo obrazac (4.4)

$$\int_0^l \left(AE\frac{d\bar{u}}{dx}\frac{df_i}{dx} - q_x f_i\right)dx - \left[f_i AE\frac{d\bar{u}}{dx}\right]_0^l = 0$$

Supstitucijom $q_x = q_0$ dobijamo

$$\int_0^l \left(AE\frac{d\bar{u}}{dx}\frac{df_i}{dx} - q_0 f_i\right)dx - f_i(l)AE\frac{d\bar{u}}{dx}|_{x=l} + \underbrace{f_i(0)AE\frac{d\bar{u}}{dx}|_{x=0}}_{0} = 0$$

Težinske funkcije su: $\bar{u}(x) = a_1 x + a_2 x^2$

$$f_1 = x \qquad \frac{df_1}{dx} = 1 \qquad \frac{d\bar{u}}{dx} = a_1 + 2a_2 x$$

$$f_2 = x^2 \qquad \frac{df_2}{dx} = 2x$$

$$i = 1{,}2$$

Pošto imamo dvije težinske funkcije formiraćemo dvije jednačine sa dvije nepoznate.

$$\int_0^l \left(AE\frac{d\bar{u}}{dx}\frac{df_1}{dx} - q_o f_1\right)dx - |f_1 F|_{x=l} = 0 \qquad , i = 1$$

$$\int_0^l \left(AE\frac{d\bar{u}}{dx}\frac{df_2}{dx} - q_o f_2\right)dx - |f_2 F|_{x=l} = 0 \qquad , i = 2$$

$$\int_0^l [AE(a_1 + 2a_2 x) \cdot 1 - q_o x]\,dx - |xF|_{x=l} = 0 \qquad , i = 1$$

$$\int_0^l [AE(a_1 + 2a_2 x) \cdot 2x - q_o x^2]\,dx - |x^2 F|_{x=l} = 0 \qquad , i = 2$$

$$\left[AE\left(a_1 x + \cancel{2}a_2\frac{x^2}{\cancel{2}}\right) - q_o\frac{x^2}{2}\right]_0^l - lF = 0 \qquad ,i=1$$

$$\left[AE\left(\cancel{2}a_1\frac{x^2}{\cancel{2}} + 4a_2\frac{x^3}{3}\right) - q_o\frac{x^3}{3}\right]_0^l - l^2F = 0 \qquad ,i=2$$

$$F = \frac{q_0 l}{2} \qquad x = l$$

$$AE(a_1 l + a_2 l^2) - q_o\frac{l^2}{2} - l\frac{q_0 l}{2} = 0 \qquad ,i=1$$

$$AE\left(a_1 l^2 + \frac{4}{3}a_2 l^3\right) - q_o\frac{l^3}{3} - l^2\frac{q_0 l}{2} = 0 \qquad ,i=2$$

$$a_1 l + a_2 l^2 = \frac{q_0 l^2}{AE} \qquad /\cdot\frac{1}{l} \qquad ,i=1$$

$$a_1 l^2 + \frac{4}{3}a_2 l^3 = \frac{5}{6}\frac{q_0 l^3}{AE} \qquad /\cdot\frac{1}{l^2} \qquad ,i=2$$

$$a_1 + a_2 l = \frac{q_0 l}{AE} \qquad /\cdot(-1) \qquad ,i=1 \qquad \text{(jednačina 1)}$$

$$a_1 + \frac{4}{3}a_2 l = \frac{5}{6}\frac{q_0 l}{AE} \qquad ,i=2 \qquad \text{(jednačina 2)}$$

$$-a_1 - a_2 l = -\frac{q_0 l}{AE}$$

$+$

$$a_1 + \frac{4}{3} a_2 l = \frac{5}{6} \frac{q_0 l}{AE}$$

$$-a_2 l + \frac{4}{3} a_2 l = -\frac{q_0 l}{AE} + \frac{5}{6} \frac{q_0 l}{AE} \qquad / \cdot \frac{1}{l}$$

$$\frac{-3a_2 + 4a_2}{3} = \frac{-6q_0 + 5q_0}{6AE}$$

$$\frac{1}{2} a_2 = -\frac{q_0}{6AE} \qquad / \cdot 3$$

$$a_2 = -\frac{q_0}{2AE}$$

Ako dobijenu vrijednost uvrstimo u jednačinu 1 dobijamo

$$a_1 - \frac{q_0 l}{2AE} = \frac{q_0 l}{AE}$$

$$a_1 = \frac{q_0 l}{AE} + \frac{q_0 l}{2AE}$$

$$a_1 = \frac{2q_0 l + q_0 l}{2AE}$$

$$a_1 = \frac{3}{2}\frac{q_0 l}{AE}$$

Uvrštavanjem dobijenih vrijednosti u pretpostavljenu funkciju dobija izraz za pomak

$$\bar{u}(x) = \frac{3}{2}\frac{q_0 l}{AE}x - \frac{q_0}{2AE}x^2$$

S obzirom da se traži pomjeranje na kraju nosača potrebno je u prethodni izraz uvrstiti $x = l$

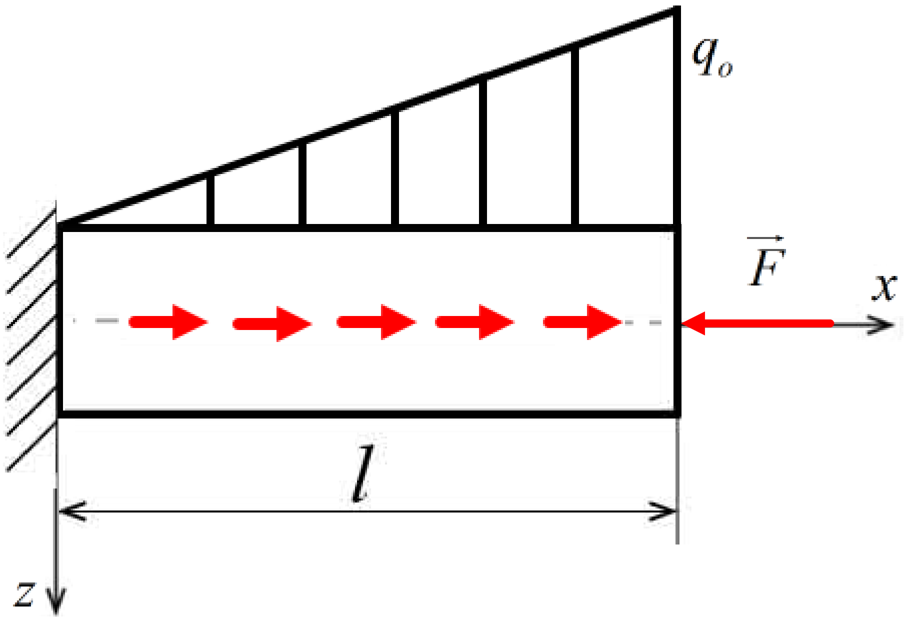
$$\bar{u}(l) = \frac{3}{2}\frac{q_0 l^2}{AE} - \frac{q_0 l^2}{2AE}$$

$$\bar{u}(l) = \frac{q_0 l^2}{AE}$$

Pomak na kraju štapa jednak je analitičkom rješenju dobijenom direktnim integraljenjem Poissonove diferencijalne jednačine. To pokazuje da pretpostavljenom funkcijom pomaka je moguće opisati proces deformisanja zadanog aksijalno opterećenog štapa. Iz toga slijedi da su zadovoljeni uslovi ravnoteže i granični uslovi sila, tj. zadovoljeni su u svakoj tački štapne konstrukcije.

Primjer 2.
Za aksijalno opterećen štap konstantne aksijalne krutosti $AE = const.$, koji je opterećen kao na slici, potrebno je primjenom Galerkinove metode odrediti pomjeranje u tački B i raspodjelu uzdužne sile. Za funkciju pomaka pretpostaviti funkciju u obliku polinoma drugog stepena

$$\bar{u}(x) = a_1 x + a_2 x^2$$



Zadano je:

$$F = q_0 l$$
$$AE = const.$$

Zadani problem osno opterećenog štapa opisan je jednodimenzionalnom Poissonovom diferencijalnom jednačinom.

$$AE\frac{d^2u}{dx^2} + q_x = 0$$

$$q(x) = q_o\left(\frac{x}{l}\right)$$ -raspodjela opterećenja

Kako bismo primjenili Galerkinog metod potrebno je prvo da provjerimo da li pretpostavljena funkcija zadovoljava granične uslove.

Zadani granični uslovi su:

$x = 0 \qquad \bar{u}(0) = a_1 0 + a_2 0^2 = 0 \qquad \bar{u}(0) = 0$ -geometrijski ***(Dirichletov)*** konturni uslov ili konturni uslov pomaka

$x = l \qquad AE\dfrac{du}{dx}(l) = -F$ -prirodni ***(Neumannov)*** konturni uslov ili konturni uslov sila

Funkcija pomaka zadovoljava geometrijske i prirodne konturne uslove.

Za rješavanje ovog problema koristićemo obrazac (4.4)

$$\int_0^l \left(AE\frac{d\bar{u}}{dx}\frac{df_i}{dx} - q_x f_i \right) dx - \left[f_i AE \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_0^l = 0$$

Supstitucijom $q(x) = q_o\left(\dfrac{x}{l}\right)$ dobijamo

$$\int_0^l \left(AE\frac{d\bar{u}}{dx}\frac{df_i}{dx} - q_0\left(\frac{x}{l}\right) f_i \right) dx - f_i(l)AE\frac{d\bar{u}}{dx}|_{x=l} + \cancelto{0}{f_i(0)}AE\frac{d\bar{u}}{dx}|_{x=0} = 0$$

Težinske funkcije su: $\bar{u}(x) = a_1 x + a_2 x^2$

$$f_1 = x \qquad \frac{df_1}{dx} = 1 \qquad \frac{d\bar{u}}{dx} = a_1 + 2a_2 x$$

$$f_2 = x^2 \qquad \frac{df_2}{dx} = 2x$$

$$i = 1,2$$

Pošto imamo dvije težinske funkcije formiraćemo dvije jednačine sa dvije nepoznate.

$$\int_0^l \left(AE \frac{d\bar{u}}{dx}\frac{df_1}{dx} - q_o\left(\frac{x}{l}\right) f_1 \right) dx - |f_1(-F)|_{x=l} = 0 \quad , i = 1$$

$$\int_0^l \left(AE \frac{d\bar{u}}{dx}\frac{df_2}{dx} - q_o\left(\frac{x}{l}\right) f_2 \right) dx - |f_2(-F)|_{x=l} = 0 \quad , i = 2$$

$$\int_0^l \left[AE(a_1 + 2a_2 x) \cdot 1 - q_o\left(\frac{x}{l}\right) x \right] dx - |x(-F)|_{x=l} = 0 , i = 1$$

$$\int_0^l \left[AE(a_1 + 2a_2 x) \cdot 2x - q_o\left(\frac{x}{l}\right) x^2 \right] dx - |x^2(-F)|_{x=l} = 0 \quad , i = 2$$

$$\left[AE\left(a_1 x + \cancel{2}a_2\frac{x^2}{\cancel{2}}\right) - q_o\frac{x^3}{3l}\right]_0^l + lF = 0 \qquad , i = 1$$

$$\left[AE\left(\cancel{2}a_1\frac{x^2}{\cancel{2}} + 4a_2\frac{x^3}{3}\right) - q_o\frac{x^4}{4l}\right]_0^l + l^2F = 0 \qquad , i = 2$$

$$F = q_0 l \qquad x = l$$

$$AE(a_1 l + a_2 l^2) - q_o\frac{l^3}{3l} + lq_0 l = 0 \qquad , i = 1$$

$$AE\left(a_1 l^2 + \frac{4}{3}a_2 l^3\right) - q_o\frac{l^4}{4l} + l^2 q_0 l = 0 \qquad , i = 2$$

$$a_1 l + a_2 l^2 = -\frac{2}{3}\frac{q_0 l^2}{AE} \ /\cdot\frac{1}{l} \qquad , i = 1$$

$$a_1 l^2 + \frac{4}{3}a_2 l^3 = -\frac{3}{4}\frac{q_0 l^3}{AE} /\cdot\frac{1}{l^2} \qquad , i = 2$$

$$a_1 + a_2 l = -\frac{2}{3}\frac{q_0 l}{AE} /\cdot(-1) \qquad , i = 1 \qquad \text{(jednačina 1)}$$

$$a_1 + \frac{4}{3}a_2 l = -\frac{3}{4}\frac{q_0 l}{AE} \qquad , i = 2 \qquad \text{(jednačina 2)}$$

$$-a_1 - a_2 l = \frac{2}{3}\frac{q_0 l}{AE}$$

$+$

$$a_1 + \frac{4}{3} a_2 l = -\frac{3}{4}\frac{q_0 l}{AE}$$

$$-a_2 l + \frac{4}{3} a_2 l = \frac{2}{3}\frac{q_0 l}{AE} - \frac{5}{6}\frac{q_0 l}{AE} \qquad /\cdot \frac{1}{l}$$

$$\frac{-3a_2 + 4a_2}{3} = \frac{6q_0 - 5q_0}{12AE}$$

$$\frac{1}{3} a_2 = -\frac{q_0}{12AE} \qquad /\cdot 3$$

$$a_2 = -\frac{1}{4}\frac{q_0}{AE}$$

Ako dobijenu vrijednost uvrstimo u jednačinu 1 dobijamo

$$a_1 - \frac{1}{4}\frac{q_0 l}{AE} = -\frac{2}{3}\frac{q_0 l}{AE}$$

$$a_1 = -\frac{2}{3}\frac{q_0 l}{AE} + \frac{1}{4}\frac{q_0 l}{AE}$$

$$a_1 = \frac{-8q_0 l + 3q_0 l}{12AE}$$

$$a_1 = -\frac{5}{12}\frac{q_0 l}{AE}$$

Uvrštavanjem dobijenih vrijednosti u pretpostavljenu funkciju dobija izraz za pomak

$$\bar{u}(x) = -\frac{5}{12}\frac{q_0 l}{AE}x - \frac{1}{4}\frac{q_0}{AE}x^2$$

$$\bar{u}(x) = \frac{q_0 l^2}{AE}\left[-\frac{5}{12}\left(\frac{x}{l}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

S obzirom da se traži pomjeranje na kraju nosača potrebno je u prethodni izraz uvrstiti $x = l$

$$\bar{u}(x) = -\frac{2}{3}\frac{q_0 l^2}{AE}$$

Raspodjela uzdužne sile

$$\bar{N} = AE\frac{d\bar{u}}{dx}$$

$$\bar{N}(x) = q_o l\left[-\frac{5}{12} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)\right]$$