Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Mašinski fakultet Istočno Sarajevo

Numeričke metode u inženjerstvu

4. Metoda težinskog reziduala

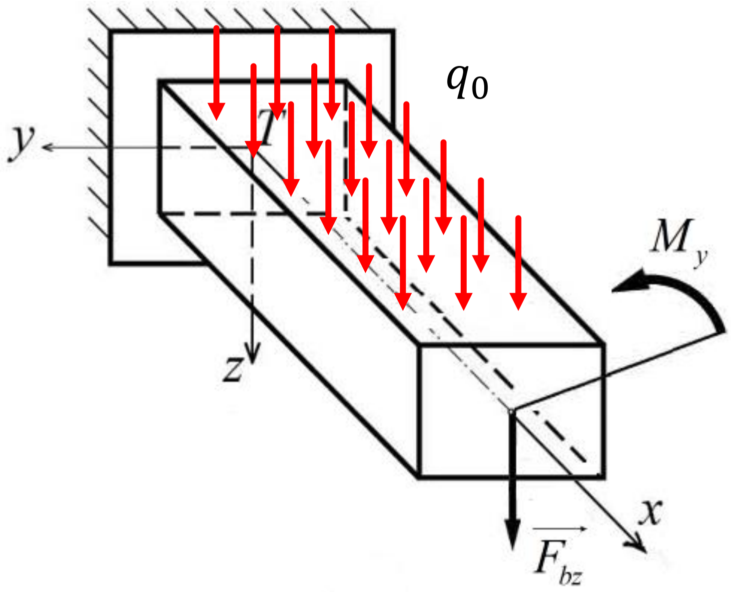
4.2 Primjena Galerkinogov metoda pri rješavanju problema savijanja grede

Doc. dr Dejan Jeremić

4.2 Primjena Galerkinogov metoda pri rješavanju problema savijanja grede

Za pravolinijski element konstrukcije koji je izložen dejstvu spoljnjeg opterećenja upravnog na njegovu podužnu osu i dejstvu spregova sila koje su paralelne sa podužnom osom kažemo da je **opterećen na savijanje.** Ovakve pravolinijske elemente zovemo **gredama.**

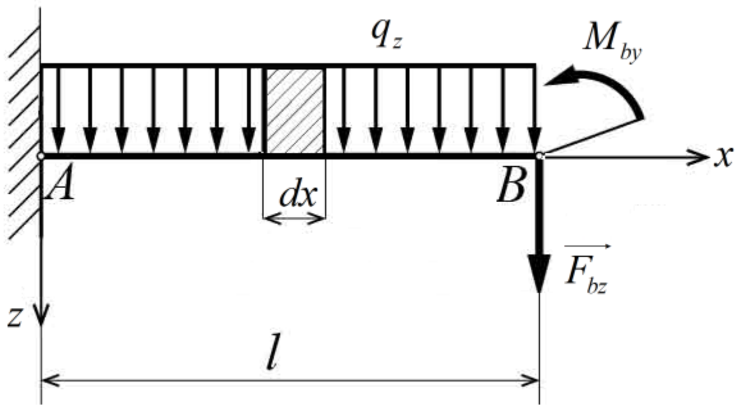
Posmatrajmo konzolu koja je opterećena spregom intenziteta M_y , koncentrisanom silom F_{bz} i ravnomjerno raspoređenim (kontinualnim) opterećenjam q_0.

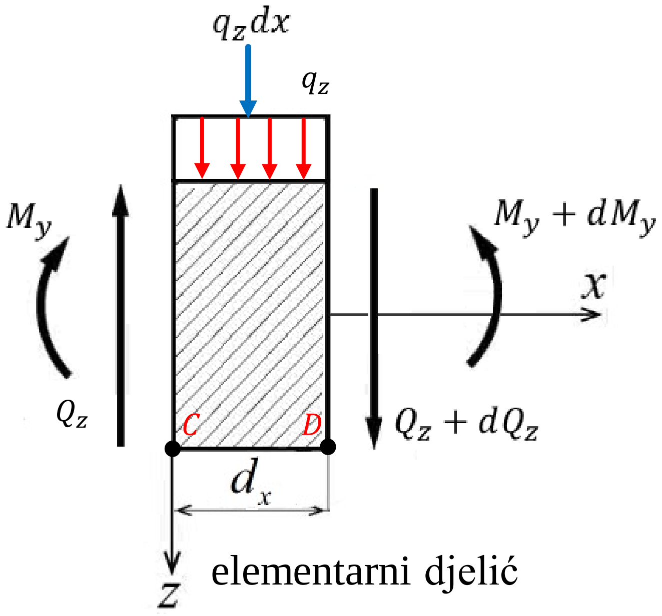


$$q_0 = q_z = const.$$

$x \to u$
$y \to v$ -obilježavanje pomjeranja duž osa
$z \to w$

Napravili jedan zamišljeni presjek grede sa ravni normalnom na podužnu osu x.





elementarni djelić

$Q_z \rightarrow F_T \rightarrow F_{bz}$ -transferzalna sila

$M_y \rightarrow M \rightarrow M_{by}$ -moment savijanja

Iz statičkih uslova ravnoteže za elementarni djelić dobijamo

$$\sum z_i = -\cancel{Q_z} + \cancel{Q_z} + dQ_z + q_z\,dx = 0$$

$$\frac{dQ_z}{dx} = -q_z \qquad (4.6)$$

$$\sum M_D = -\cancel{M_y} + \cancel{M_y} + dM_y + \cancelto{0}{q_z dx \frac{dx}{2}} - Q_z dx = 0$$

$$d^2(x) \ll dx$$

$$dM_y - Q_z dx = 0$$

$$dM_y = Q_z dx$$

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z \qquad (4.7)$$

Ako izraz (4.6) uvrstimo u izraz (4.7) dobijamo

$$\frac{d^2M_y}{dx^2} = \frac{dQ_z}{dx}$$

$$\frac{d^2M_y}{dx^2} = -q_z \quad (4.8)$$

Navedeni izrazi $\frac{dF_{T(z)}}{dx} = -q_z \rightarrow F_T = \frac{dM}{dx} \rightarrow \boxed{-q_z = \frac{d^2M}{dx^2}}$ predstavlja vezu između napadnog momenta, transferzalne sile i specifičnog opterećenja.

Koristeći diferencijalnu jednačinu eleastične linije dobijamo

$$EI_y\frac{d^2w}{dx^2} = -M_y \quad (4.9)$$

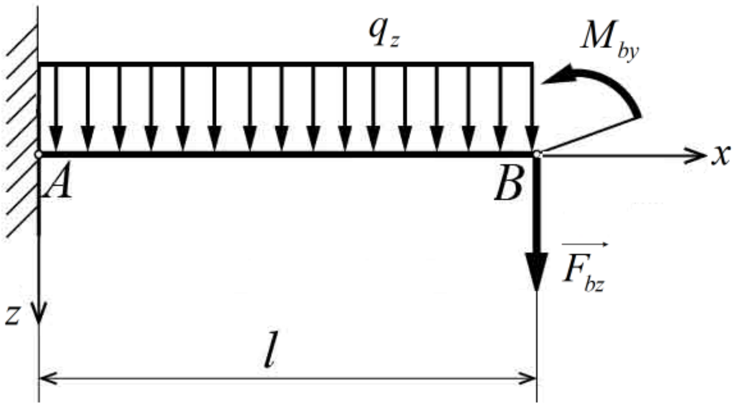
$$EI_y\frac{d^4w}{dx^4} = -\frac{d^2M_y}{dx^2}$$

$$EI_y\frac{d^4w}{dx^4} = q_z$$

$$EI_y\frac{d^4w}{dx^4} - q_z = 0 \quad (4.10)$$

Diferencijalna jednačina savijanja grede

Pošto je diferencijalna jednačina kojom je definisan matematički model savijanja grede četvrtog reda potrebna su nam četiri konturna uslova da bismo u potpunosti riješili posmatrani problem.



I $\boxed{w(0) = 0}$

II $\boxed{\dfrac{dw}{dx}(0) = 0}$

-geometrijski ***(Dirichletov)*** konturni uslov ili konturni uslov pomaka

III $\boxed{EI_y \dfrac{d^2w}{dx^2}(l) = -M_{by}}$

IV $\boxed{EI_y \dfrac{d^3w}{dx^3}(l) = -F_{bz}}$

-prirodni ***(Neumannov)*** konturni uslov ili konturni uslov sila i momenta

Rješavanje problema grede opterećene na savijanje izvodi se pomoću diferencijalne jednačine savijanja grede (4.10).

$$EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} - q_z = 0 \quad (4.10)$$

Ako se rješenje diferencijalne jednačine za područje $0 \leq x \leq l$ pretpostavi u obliku $\overline{w}(x) = f_i(x) a_i$, analogno rješavanju problema aksijalno opterećenog štapa i u skladu sa Galerkonovom metodom težinskog reziduala, izvodi se sledeća relacija za izračunavanje nepoznatih parametara:

$$\int_0^l \left(EI_y \frac{d^4 \overline{w}}{dx^4} - q_z \right) f_i dx = 0$$

$$\int_0^l \left(EI_y \frac{d^4 \overline{w}}{dx^4} \right) f_i dx - \int_0^l q_z f_i dx = 0 \qquad i = 1,2,3.., n \qquad (4.11)$$

Svakom nepoznatom koeficijentu a_i pridružena je funkcija f_i koju je potrebno tako odabrati da su granični uslovi zadovoljeni.
U tačkama u kojima je rješenje tačno rezidual $\boldsymbol{R}$ je jednak nuli, a ako približno rješenje rezidual $\boldsymbol{R}$ je različit od nule

$$R = EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} - q_z \neq 0 \qquad (4.12)$$

Da bismo dobili model pogodan za rješavanje problema potrebno je na diferencijalnoj jednačini (4.11) provesti postupak parcijalne integracije dva puta za prvi integral pri čemu dobijamo sledeći izraz

$$\int_0^l \left(EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2}\frac{d^2 f_i}{dx^2}\right) - \int_0^l q_z\, f_i dx + \left[f_i EI_y \frac{d^3\overline{w}}{dx^3}\right]_0^l - \left[\frac{df_i}{dx} EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2}\right]_0^l = 0 \quad (4.12)$$

-opšti izraz Galerkinovog metoda za gredu opterećenu na savijanje

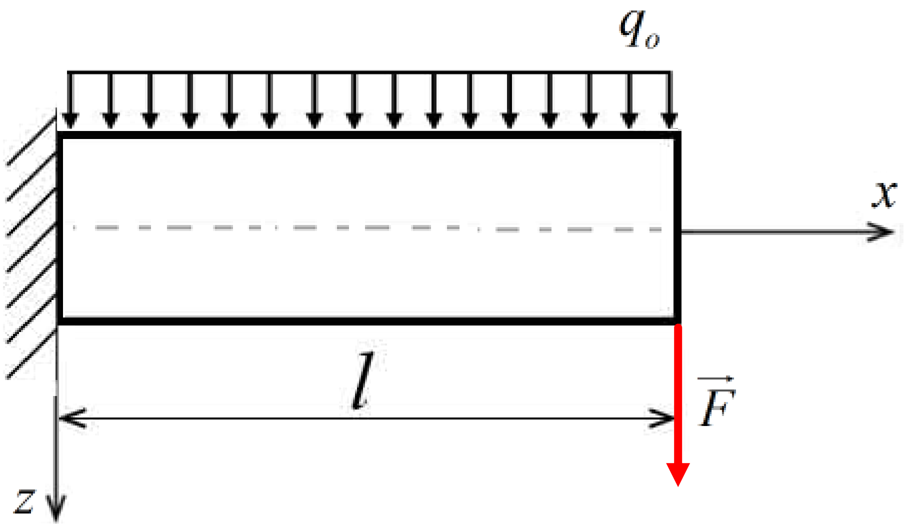
$$\boxed{EI_y \frac{d^3\overline{w}}{dx^3}(l) = -F_{bz}}$$

$$\boxed{EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2}(l) = -M_{by}}$$

Članovi u uglastim zagradama odgovaraju graničnim uslovima sila, što ukazije da su ti uslovi uključeni u formulaciju, pa pretpostavljena funkcija mora samo zadovoljiti samo geometrijsla granične uslove.

Primjer 1.
Za konzolni nosač konstantne krutosti na savijanje $EI = const.$, koji je opterećen kao na slici, potrebno je primjenom Galerkinove metode odrediti ugib slobodnog kraja i raspodjelu poprečnih sila i momenata savijanja. Za funkciju ugiba pretpostaviti funkciju u obliku polinoma drugog stepena

$$\bar{w}(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3$$



Zadano je:

$EI = const.$
$q_0 = const.$
$F = q_0 l$

Zadani problem grede opterećene na savijanje opisan je sledećom diferencijalnom jednačinom.

$$EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} - q_z = 0$$

$$q_z = q_0$$

Kako bismo primjenili Galerkinog metod potrebno je prvo da provjerimo da li pretpostavljena funkcija zadovoljava granične uslove.

Zadani granični uslovi su:

$$\bar{w}(0) = a_1 0^2 + a_2 0^3 = 0 \qquad \bar{w}(0) = 0$$

-geometrijski ***(Dirichletov)*** konturni uslov ili konturni uslov pomaka

$$x = 0$$

$$\frac{d\bar{w}}{dx}(0) = 2a_1 x + 3a_2 x^2 = 2a_1 0 + 3a_2 0^2 = 0$$

$$x = l \qquad EI_y \frac{d^3\bar{w}}{dx^3}(l) = -F$$

$$EI_y \frac{d^2\bar{w}}{dx^2}(l) = 0$$

-prirodni ***(Neumannov)*** konturni uslov ili konturni uslov sila

Funkcija ugiba zadovoljava geometrijske konturne uslove.

Za rješavanje ovog problema koristićemo obrazac (4.12)

$$\int_0^l \left(EI_y \frac{d^2\bar{w}}{dx^2} \frac{d^2 f_i}{dx^2} \right) - \int_0^l q_z f_i dx + \left[\overset{-F}{f_i EI_y \frac{d^3\bar{w}}{dx^3}} \right]_0^l - \overset{0}{\cancel{\left[\frac{df_i}{dx} EI_y \frac{d^2\bar{w}}{dx^2} \right]_0^l}} = 0$$

$$\int_0^l \left(EI_y \frac{d^2\bar{w}}{dx^2} \frac{d^2 f_i}{dx^2} \right) - \int_0^l q_z f_i dx - [f_i F]_0^l = 0$$

Težinske funkcije su: $\bar{w}(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3$

$$f_1 = x^2 \qquad f_2 = x^3 \qquad i = 1,2 \qquad q_z = q_0$$

$$\frac{df_1}{dx} = 2x \qquad \frac{d^2 f_1}{dx^2} = 2 \qquad \frac{d\bar{w}}{dx} = 2a_1 x + 3a_2 x^2 \qquad \frac{d^3\bar{w}}{dx^3} = 6a_2$$

$$\frac{df_2}{dx} = 3x^2 \qquad \frac{d^2 f_2}{dx^2} = 6x \qquad \frac{d^2\bar{w}}{dx^2} = 2a_1 + 6a_2 x$$

Pošto imamo dvije težinske funkcije formiraćemo dvije jednačine sa dvije nepoznate.

$$\int_0^l \left(EI_y \frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\frac{d^2 f_1}{dx^2} \right) - \int_0^l q_0\, f_1 dx - [f_1 F]_0^l = 0 \quad ,i = 1$$

$$\int_0^l \left(EI_y \frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\frac{d^2 f_2}{dx^2} \right) - \int_0^l q_0\, f_2 dx - [f_2 F]_0^l = 0 \quad ,i = 2$$

$$\int_0^l [EI_y(2a_1 + 6a_2 x) \cdot 2]\, dx - \int_0^l q_0 x^2\, dx - [x^2 F]_0^l = 0 \qquad ,i = 1$$

$$\int_0^l [EI_y(2a_1 + 6a_2 x) \cdot 6x]\, dx - \int_0^l q_0 x^3\, dx - [x^3 F]_0^l = 0 \qquad ,i = 2$$

$$\int_0^l \left[EI_y(4a_1 + 12a_2x)\right] dx - \int_0^l q_0x^2\, dx - [x^2F]_{x=l} = 0 \qquad ,i = 1$$

$$\int_0^l \left[EI_y(12a_1x + 36a_2x^2)\right] dx - \int_0^l q_0x^3\, dx - [x^3F]_{x=l} = 0 \qquad ,i = 2$$

$$F = q_0l \qquad x = l$$

$$\left[EI_y\left(4a_1x + \cancel{12}a_2\frac{x^2}{\cancel{2}}\right)\right]_o^l - \left[q_0\frac{x^3}{3}\right]_o^l - l^2q_0l = 0 \qquad ,i = 1$$

$$\left[EI_y\left(\cancel{12}a_1\frac{x^2}{\cancel{2}} + \cancel{36}a_2\frac{x^3}{\cancel{3}}\right)\right]_o^l - \left[q_0\frac{x^4}{4}\right]_o^l - l^3q_0l = 0 \qquad ,i = 2$$

$$EI_y(4a_1l + 6a_2l^2) - q_0\frac{l^3}{3} - q_0l^3 = 0 \qquad /\cdot\frac{1}{l} \qquad ,i = 1$$

$$EI_y(6a_1l^2 + 12a_2l^3) - q_0\frac{l^4}{4} - q_0l^4 = 0 \qquad /\cdot\frac{1}{l^2} \qquad ,i = 2$$

$$4a_1 + 6a_2l = \frac{4}{3}\frac{q_0l^2}{EI_y} \qquad /\cdot(-2) \qquad ,i = 1 \qquad \text{(jednačina 1)}$$

$$6a_1 + 12a_2l = \frac{5}{4}\frac{q_0l^2}{EI_y} \qquad ,i = 2 \qquad \text{(jednačina 2)}$$

$$-8a_1 - 12a_2 l = -\frac{8}{3}\frac{q_0 l^2}{EI_y}$$

$+$

$$6a_1 + 12a_2 l = \frac{5}{4}\frac{q_0 l^2}{EI_y}$$

$$-8a_1 + 6a_1 = -\frac{8}{3}\frac{q_0 l^2}{EI_y} + \frac{5}{4}\frac{q_0 l^2}{EI_y}$$

$$-2a_1 = \frac{-32q_0 l^2 + 15q_0 l^2}{12EI_y}$$

$$-2a_1 = -\frac{17}{12}\frac{q_0 l^2}{EI_y} \quad /\cdot(-1)$$

$$\boxed{a_1 = \frac{17}{24}\frac{q_0 l^2}{EI_y}}$$

Ako dobijenu vrijednost uvrstimo u jednačinu 1 dobijamo

$$4\frac{17}{24}\frac{q_0 l^2}{EI_y} + 6a_2 l = \frac{4}{3}\frac{q_0 l^2}{EI_y}$$

$$6a_2 l = \frac{4}{3}\frac{q_0 l^2}{EI_y} - \frac{68}{24}\frac{q_0 l^2}{EI_y} \qquad /\cdot\frac{1}{l}$$

$$6a_2 = \frac{4}{3}\frac{q_0 l}{EI_y} - \frac{68}{24}\frac{q_0 l}{EI_y}$$

$$6a_2 = \frac{32q_0 l - 68q_0 l}{24EI_y} \Rightarrow 6a_2 = -\frac{36q_0 l}{24EI_y} \Rightarrow 6a_2 = -\frac{3q_0 l}{2EI_y}$$

$$\boxed{a_2 = -\frac{1}{4}\frac{q_0 l}{EI_y}}$$

Uvrštavanjem dobijenih vrijednosti u pretpostavljenu funkciju dobija izraz za ugib

$$\overline{w}(x) = \frac{17}{24}\frac{q_0 l^2}{EI_y}x^2 - \frac{1}{4}\frac{q_0 l}{EI_y}x^3$$

S obzirom da se traži ugib na kraju nosača potrebno je u prethodni izraz uvrstiti $x = l$

$$\overline{w}(l) = \frac{17}{24}\frac{q_0 l^2}{EI_y}l^2 - \frac{1}{4}\frac{q_0 l}{EI_y}l^3$$

$$\overline{w}(l) = \frac{11}{24}\frac{q_0 l^4}{EI_y}$$

Raspodjela poprečnih sila:

$$\bar{Q}_z = -EI_y \frac{d^3\overline{w}}{dx^3} \qquad \frac{d^3\overline{w}}{dx^3} = 6a_2$$

$$\bar{Q}_z = -\cancel{EI_y}6\left(-\frac{1}{4}\frac{q_0 l}{\cancel{EI_y}}\right)$$

$$\boxed{\bar{Q}_z = \frac{3}{2}q_0 l}$$

Raspodjela momenata savijanja:

$$\bar{M}_y = -EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} \qquad \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} = 2a_1 + 6a_2 x$$

$$\bar{M}_y = -EI_y(2a_1 + 6a_2 x)$$

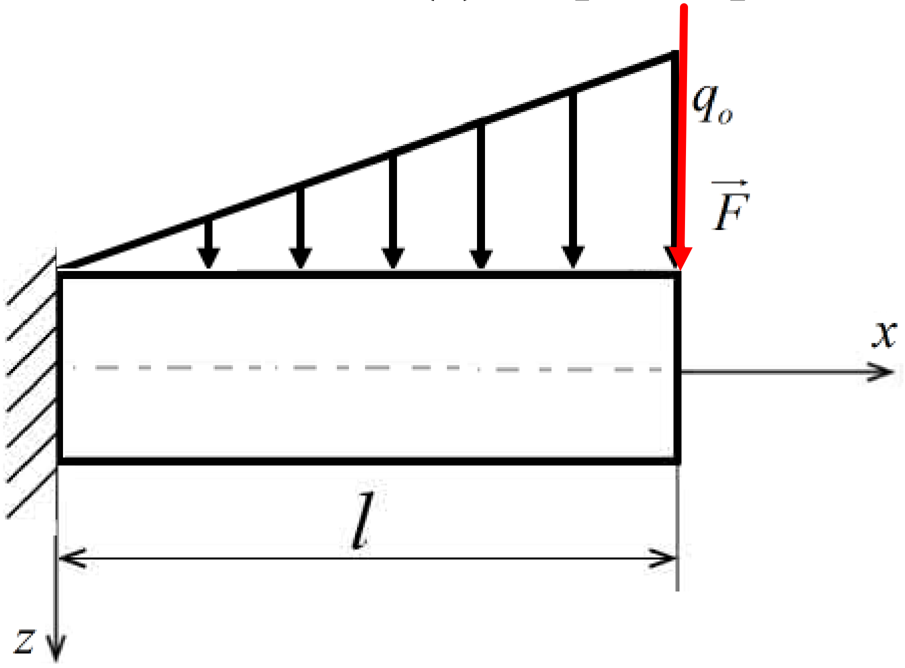
$$\bar{M}_y = -\cancel{EI_y}\left(2\frac{17}{24}\frac{q_0 l^2}{\cancel{EI_y}} - 6\frac{1}{4}\frac{q_0 l}{\cancel{EI_y}}x\right)$$

$$\boxed{\bar{M}_y = -\frac{q_0 l^2}{12}\left(17 - 18\frac{x}{l}\right)}$$

Galerkinovom metodom i metodom direktne integracije diferencijalne jednačine dobijaju se iste vrijednosti ugiba na kraju konzole. Najveće odstupanje pojavljuje se pri izračunavanju poprečnih sila, što ukazuje da greška raste sa povećanjem reda izvoda pretpostavljene funkcije pomaka.

Primjer 2.
Za konzolni nosač konstantne krutosti na savijanje $EI = const.$, koji je opterećen kao na slici, potrebno je primjenom Galerkinove metode odrediti ugib slobodnog kraja i raspodjelu poprečnih sila i momenata savijanja. Za funkciju ugiba pretpostaviti funkciju u obliku polinoma drugog stepena

$$\overline{w}(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3$$



Zadano je:

$$F = q_0 l$$
$$EI = const.$$

Zadani problem grede opterećene na savijanje opisan je sledećom diferencijalnom jednačinom.

$$EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} - q_z = 0$$

$$q_z = q_0 \left(\frac{x}{l}\right)$$

Kako bismo primjenili Galerkinog metod potrebno je prvo da provjerimo da li pretpostavljena funkcija zadovoljava granične uslove.

Zadani granični uslovi su:

$x = 0$

$$\bar{w}(0) = a_1 0^2 + a_2 0^3 = 0 \qquad \bar{w}(0) = 0$$

-geometrijski ***(Dirichletov)*** konturni uslov ili konturni uslov pomaka

$$\frac{d\bar{w}}{dx}(0) = 2a_1 x + 3a_2 x^2 = 2a_1 0 + 3a_2 0^2 = 0$$

$x = l$

$$EI_y \frac{d^3\bar{w}}{dx^3}(l) = -F$$

-prirodni ***(Neumannov)*** konturni uslov ili konturni uslov sila

$$EI_y \frac{d^2\bar{w}}{dx^2}(l) = 0$$

Funkcija ugiba zadovoljava geometrijske konturne uslove.

Za rješavanje ovog problema koristićemo obrazac (4.12)

$$\int_0^l \left(EI_y \frac{d^2\bar{w}}{dx^2} \frac{d^2 f_i}{dx^2} \right) - \int_0^l q_z\, f_i dx + \left[f_i \overbrace{EI_y \frac{d^3\bar{w}}{dx^3}}^{-F} \right]_0^l - \cancelto{0}{\left[\frac{df_i}{dx} EI_y \frac{d^2\bar{w}}{dx^2} \right]_0^l} = 0$$

$$\int_0^l \left(EI_y \frac{d^2\bar{w}}{dx^2} \frac{d^2 f_i}{dx^2} \right) - \int_0^l q_z\, f_i dx - [f_i F]_0^l = 0$$

Težinske funkcije su: $\overline{w}(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3$

$$f_1 = x^2 \qquad \frac{df_1}{dx} = 2x \qquad \frac{d^2 f_1}{dx^2} = 2 \qquad \frac{d\overline{w}}{dx} = 2a_1 x + 3a_2 x^2 \qquad \frac{d^3\overline{w}}{dx^3} = 6a_2$$

$$f_2 = x^3 \qquad \frac{df_2}{dx} = 3x^2 \qquad \frac{d^2 f_2}{dx^2} = 6x \qquad \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} = 2a_1 + 6a_2 x$$

$$i = 1,2$$

$$q_z = q_0$$

Pošto imamo dvije težinske funkcije formiraćemo dvije jednačine sa dvije nepoznate.

$$\int_0^l \left(EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} \frac{d^2 f_1}{dx^2} \right) - \int_0^l q_0 \left(\frac{x}{l}\right) f_1 dx - [f_1 F]_0^l = 0, i = 1$$

$$\int_0^l \left(EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} \frac{d^2 f_2}{dx^2} \right) - \int_0^l q_0 \left(\frac{x}{l}\right) f_2 dx - [f_2 F]_0^l = 0, i = 2$$

$$\int_0^l [EI_y(2a_1 + 6a_2 x) \cdot 2]\, dx - \int_0^l q_0 \left(\frac{x}{l}\right) x^2\, dx - [x^2 F]_0^l = 0 \qquad , i = 1$$

$$\int_0^l [EI_y(2a_1 + 6a_2 x) \cdot 6x]\, dx - \int_0^l q_0 \left(\frac{x}{l}\right) x^3\, dx - [x^3 F]_0^l = 0 \qquad , i = 2$$

$$\int_0^l \left[EI_y(4a_1 + 12a_2 x)\right] dx - \int_0^l q_0\left(\frac{x^3}{l}\right) dx - [x^2 F]_{x=l} = 0 \qquad , i = 1$$

$$\int_0^l \left[EI_y(12a_1 x + 36a_2 x^2)\right] dx - \int_0^l q_0\left(\frac{x^4}{l}\right) dx - [x^3 F]_{x=l} = 0 \qquad , i = 2$$

$$F = q_0 l \qquad x = l$$

$$\left[EI_y\left(4a_1 x + \cancel{12}a_2 \frac{x^2}{\cancel{2}}\right)\right]_o^l - \left[q_0 \frac{x^4}{4l}\right]_o^l - l^2 q_0 l = 0 \qquad , i = 1$$

$$\left[EI_y\left(\cancel{12}a_1 \frac{x^2}{\cancel{2}} + \cancel{36}a_2 \frac{x^3}{\cancel{3}}\right)\right]_o^l - \left[q_0 \frac{x^5}{5l}\right]_o^l - l^3 q_0 l = 0 \qquad , i = 2$$

$$EI_y(4a_1 l + 6a_2 l^2) - q_0 \frac{l^{\cancel{4}}}{4\cancel{l}} - q_0 l^3 = 0 \qquad /\cdot \frac{1}{l} \qquad , i = 1$$

$$EI_y(6a_1 l^2 + 12a_2 l^3) - q_0 \frac{l^{\cancel{5}}}{5\cancel{l}} - q_0 l^4 = 0 \qquad /\cdot \frac{1}{l^2} \qquad , i = 2$$

$$4a_1 + 6a_2 l = \frac{5}{4}\frac{q_0 l^2}{EI_y} \qquad /\cdot (-2) \qquad , i = 1 \qquad \text{(jednačina 1)}$$

$$6a_1 + 12a_2 l = \frac{6}{5}\frac{q_0 l^2}{EI_y} \qquad , i = 2 \qquad \text{(jednačina 2)}$$

$$-8a_1 - 12a_2 l = -\frac{10}{4}\frac{q_0 l^2}{EI_y}$$

$+$

$$6a_1 + 12a_2 l = \frac{6}{5}\frac{q_0 l^2}{EI_y}$$

$$-8a_1 + 6a_1 = -\frac{5}{2}\frac{q_0 l^2}{EI_y} + \frac{6}{5}\frac{q_0 l^2}{EI_y}$$

$$-2a_1 = \frac{-25q_0 l^2 + 12q_0 l^2}{10EI_y}$$

$$-2a_1 = -\frac{13}{10}\frac{q_0 l^2}{EI_y} \quad /\cdot(-1)$$

$$\boxed{a_1 = \frac{13}{20}\frac{q_0 l^2}{EI_y}}$$

Ako dobijenu vrijednost uvrstimo u jednačinu 1 dobijamo

$$4\frac{13}{20}\frac{q_0 l^2}{EI_y} + 6a_2 l = \frac{5}{4}\frac{q_0 l^2}{EI_y}$$

$$6a_2 l = \frac{5}{4}\frac{q_0 l^2}{EI_y} - \frac{13}{5}\frac{q_0 l^2}{EI_y} \qquad /\cdot\frac{1}{l}$$

$$6a_2 = \frac{5}{4}\frac{q_0 l}{EI_y} - \frac{13}{5}\frac{q_0 l}{EI_y}$$

$$6a_2 = \frac{25q_0 l - 52q_0 l}{20EI_y} \Rightarrow 6a_2 = -\frac{27q_0 l}{20EI_y} \Rightarrow a_2 = -\frac{27q_0 l}{120EI_y}$$

$$\boxed{a_2 = -\frac{9}{40}\frac{q_0 l}{EI_y}}$$

Uvrštavanjem dobijenih vrijednosti u pretpostavljenu funkciju dobija izraz za ugib

$$\bar{w}(x) = \frac{13}{20}\frac{q_0 l^2}{EI_y}x^2 - \frac{9}{40}\frac{q_0 l}{EI_y}x^3$$

$$\bar{w}(x) = \frac{q_0 l^4}{EI_y}\left[\frac{13}{20}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{9}{40}\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$$

S obzirom da se traži ugib na kraju nosača potrebno je u prethodni izraz uvrstiti $x = l$

$$\bar{w}(l) = \frac{q_0 l^4}{EI_y}\left[\frac{13}{20} - \frac{9}{40}\right]$$

$$\bar{w}(l) = \frac{17}{40}\frac{q_0 l^4}{EI_y}$$

Raspodjela poprečnih sila:

$$\bar{Q}_z = -EI_y \frac{d^3\overline{w}}{dx^3} \qquad \frac{d^3\overline{w}}{dx^3} = 6a_2$$

$$\bar{Q}_z = -\cancel{EI_y}6\left(-\frac{9}{40}\frac{q_0 l}{\cancel{EI_y}}\right)$$

$$\boxed{\bar{Q}_z = \frac{27}{20}q_0 l}$$

Raspodjela momenata savijanja:

$$\bar{M}_y = -EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} \qquad \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} = 2a_1 + 6a_2 x$$

$$\bar{M}_y = -EI_y(2a_1 + 6a_2 x)$$

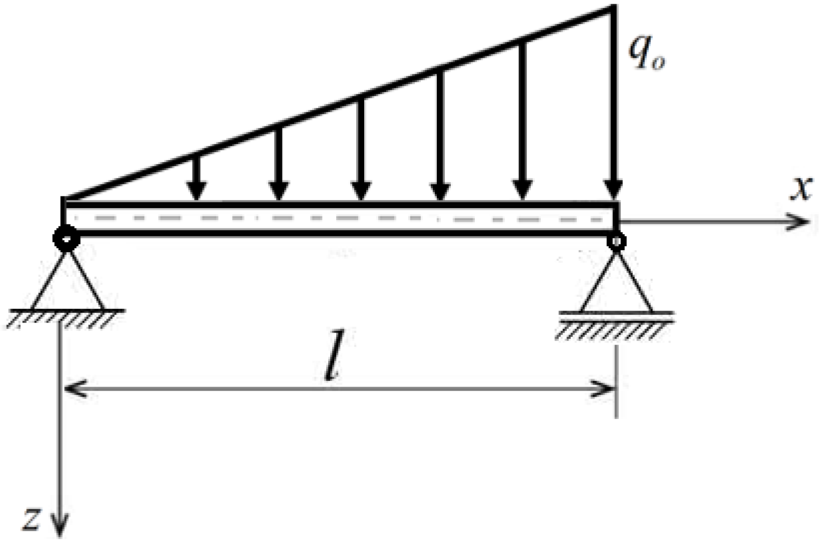
$$\bar{M}_y = -\cancel{EI_y}\left(2\frac{13}{20}\frac{q_0 l^2}{\cancel{EI_y}} - 6\frac{9}{40}\frac{q_0 l}{\cancel{EI_y}}x\right)$$

$$\boxed{\bar{M}_y = \frac{q_o l^2}{12}\left(\frac{27}{20}\left(\frac{x}{l}\right) - \frac{13}{10}\right)}$$

Primjer 3.

Za gredu konstantne krutosti na savijanje $EI = const.$, koja je opterećen kao na slici, potrebno je primjenom Galerkinove metode odrediti raspodjelu ugiba i momenata savijanja. Za funkciju ugiba odabrati jednu od ponuđenih

$a)\ \bar{w}(x) = a\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)$ $b)\ \bar{w}(x) = a_1x^2 + a_2x^3$ $c)\ \bar{w}(x) = a_1\sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right) + a_2$



Zadano je:
$q_0,$
$EI = const.$

Zadani problem grede opterećene na savijanje opisan je sledećom diferencijalnom jednačinom.

$$EI_y\frac{d^4w}{dx^4} - q_z = 0$$

$$q_z = q_0\left(\frac{x}{l}\right)$$

Kako bismo primjenili Galerkinog metod potrebno je prvo da provjerimo koja pretpostavljena funkcija zadovoljava granične uslove.

Provjera koja funkcija zadovoljava granične uslove:

Geometrijski ***(Dirichletov)*** konturni uslov ili konturni uslov pomaka

$a)\ \bar{w}(x) = a\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)$

$x = 0 \qquad \bar{w}(0) = a\cos\left(\frac{\pi}{l}0\right) \qquad \bar{w}(0) = a \qquad \Rightarrow \qquad a = 0$ -ova funkcija ne zadovoljava geometrijski uslov

$b)\ \bar{w}(x) = a_1x^2 + a_2x^3$

$x = 0 \quad \bar{w}(0) = a_1 0^2 + a_2 0^3 \qquad \bar{w}(0) = 0$

$x = l \quad \bar{w}(l) = a_1 l^2 + a_2 l^3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = -a_2 l$ **-ova funkcija zadovoljava uz dodatni uslov**

$c)\ \bar{w}(x) = a_1\sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right) + a_2$

$x = 0 \qquad \bar{w}(0) = a_1\sin\left(\frac{\pi}{2l}0\right) + a_2 \qquad \bar{w}(0) = a_2 \qquad a_2 = 0$

-ova funkcija ne zadovoljava geometrijski uslov

$x = l \qquad \bar{w}(l) = a_1\sin\left(\frac{\pi}{2l}l\right) + a_2 \qquad a_1 = 0$

Prirodni ***(Neumannov)*** konturni uslov ili konturni uslov sila

$$EI_y \frac{d^3\overline{w}}{dx^3} = -Q_z = 0$$

$$EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} = -M_y = 0$$

Funkcija ugiba b) zadovoljava geometrijske konturne uslove, ali moramo uzeti u obzir dodatni uslov $a_1 = -a_2 l$

$$\overline{w}(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3 \quad \Longrightarrow \quad \overline{w}(x) = -a_2 l x^2 + a_2 x^3$$

$$\boxed{\overline{w}(x) = a_2(x^3 - l x^2)}$$

Za rješavanje ovog problema koristićemo obrazac (4.12)

$$\int_0^l \left(EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2}\frac{d^2 f_i}{dx^2} \right) - \int_0^l q_z f_i dx + \cancelto{0}{\left[f_i EI_y \frac{d^3\overline{w}}{dx^3} \right]_0^l} - \cancelto{0}{\left[\frac{df_i}{dx} EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} \right]_0^l} = 0$$

$$\int_0^l \left(EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2}\frac{d^2 f_i}{dx^2} \right) - \int_0^l q_z f_i dx = 0$$

Težinska funkcija je: $\overline{w}(x) = a_2(x^3 - lx^2)$

$$f = (x^3 - lx^2) \qquad \frac{df}{dx} = (3x^2 - 2lx) \qquad \frac{d^2 f}{dx^2} = (6x - 2l)$$

$$\frac{d\overline{w}}{dx} = a_2(3x^2 - 2lx) \qquad \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} = a_2(6x - 2l)$$

$$\int_0^l \left[EI_y a_2(6x - 2l)(6x - 2l)\right] dx - \int_0^l q_0\left(\frac{x}{l}\right)(x^3 - lx^2)dx = 0$$

$$\int_0^l \left[EI_y a_2(36x^2 - 12lx - 12lx - 4l^2)\right] dx - \int_0^l q_0\left(\frac{x^4}{l} - x^3\right) dx = 0$$

$$\left[EI_y a_2\left(36\frac{x^3}{3} - 24l\frac{x^2}{2} - 4l^2 x\right)\right]_o^l - \left[q_0\left(\frac{x^5}{5l} - \frac{x^4}{4}\right)\right]_o^l = 0$$

$$EI_y a_2\left(\cancel{3}6\frac{l^3}{\cancel{3}} - 2\cancel{4}l\frac{l^2}{\cancel{2}} - 4l^2 l\right) - q_0\left(\frac{\cancel{l^5}}{5\cancel{l}} - \frac{l^4}{4}\right) = 0$$

$$EI_y a_2 (12l^3 - 12l^3 - 4l^3) + q_0 \frac{l^4}{20} = 0$$

$$EI_y a_2 4l^3 = -\frac{1}{20} q_0 l^4 \quad / \cdot \frac{1}{l^3}$$

$$\boxed{a_2 = -\frac{1}{80} \frac{q_o l}{EI_y}}$$

Uvrštavanjem dobijene vrijednosti u pretpostavljenu funkciju dobija se izraz za ugib

$$\overline{w}(x) = \frac{1}{80} \frac{q_0 l}{EI_y} l x^2 - \frac{1}{80} \frac{q_0 l}{EI_y} x^3$$

$$\overline{w}(x) = \frac{q_0 l^2 x^2}{80EI_y} - \frac{q_0 l x^3}{80EI_y}$$

$$\boxed{\overline{w}(x) = \frac{q_0 l^4}{80EI_y} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]}$$

Raspodjela momenata savijanja:

$$\bar{M}_y = -EI_y \frac{d^2\bar{w}}{dx^2} \qquad \frac{d^2\bar{w}}{dx^2} = a_2(6x - 2l)$$

$$\bar{M}_y = -EI_y a_2(6x - 2l)$$

$$\bar{M}_y = -\cancel{EI_y}\left(-\frac{1}{80}\frac{q_o l}{\cancel{EI_y}}\right)(6x - 2l)$$

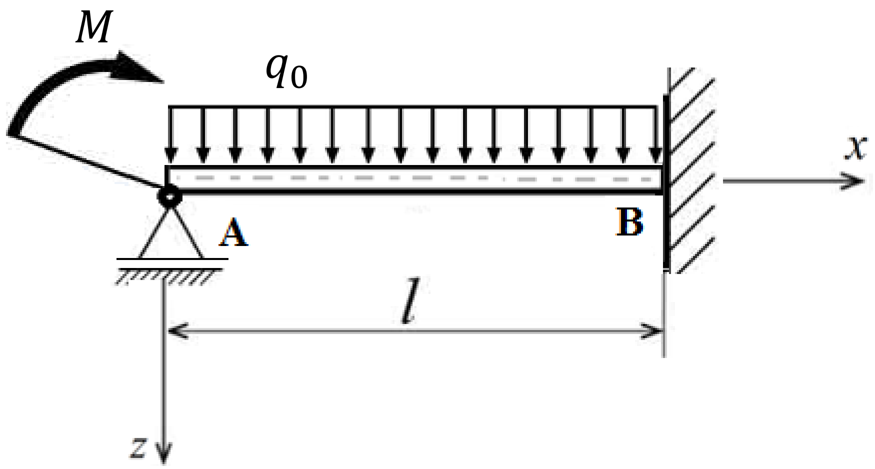
$$\bar{M}_y = \frac{q_0 l}{80}6x - \frac{2q_0 l^2}{80}$$

$$\boxed{\bar{M}_y = -\frac{q_0 l^2}{80}\left[2 - 6\left(\frac{x}{l}\right)\right]}$$

Primjer 3.

Za gredu konstantne krutosti na savijanje $EI = const.$, koja je opterećen kao na slici, potrebno je primjenom Galerkinove metode odrediti raspodjelu ugiba i momenata savijanja. Za funkciju ugiba pretpostaviti funkciju

$$\overline{w}(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$



Zadano je:
q_0,
l,
$EI_y = conast.$
$M = q_0 l^2$

Zadani problem grede opterećene na savijanje opisan je sledećom diferencijalnom jednačinom.

$$EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} - q_z = 0$$

$$q_z = q_0$$

Kako bismo primjenili Galerkinog metod potrebno je prvo da provjerimo koja pretpostavljena funkcija zadovoljava granične uslove.

Provjera graničnih uslova:

Geometrijski ***(Dirichletov)*** konturni uslov ili konturni uslov pomaka

$$\overline{w}(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$x = 0$ $\quad \overline{w}(0) = a_1 0 + a_2 0^2 + a_3 0^3 \qquad \overline{w}(0) = 0$

$x = l$ $\quad \overline{w}(l) = a_1 l + a_2 l^2 + a_3 l^3 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -a_2 l - a_3 l^2$ -dodatni uslov (1)

$$\frac{d\overline{w}}{dx}(l) = a_1 + 2a_2 l + 3a_3 l^2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -2a_2 l - 3a_3 l^2$$ -dodatni uslov (2)

Funkcija zadovoljava uz dodatne uslove (1) i (2)!

Iz dodatnih uslova slijedi:

$$-a_2 l - a_3 l^2 = -2a_2 l - 3a_3 l^2$$

$$-a_2 l + 2a_2 l = a_3 l^2 - 3a_3 l^2$$

$$a_2 l = -2a_3 l^2 \quad /\cdot \frac{1}{l}$$

$$\boxed{a_2 = -2a_3 l}$$

Ako a_2 vratimo u dodatni uslov (2) dobijamo

$$a_1 = -2(-2a_3 l)l - 3a_3 l^2$$

$$a_1 = 4a_3 l^2 - 3a_3 l^2$$

$$\boxed{a_1 = a_3 l^2}$$

Ako se vratimo u pretpostavljenu funkciju dobijamo:

$$\overline{w}(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\overline{w}(x) = a_3 l^2 x - 2a_3 l x^2 + a_3 x^3$$

$$\boxed{\overline{w}(x) = a_3(x^3 - 2lx^2 + l^2 x)}$$

Prirodni ***(Neumannov)*** konturni uslov ili konturni uslov sila

$$EI_y \frac{d^3\overline{w}}{dx^3} = -Q_z = 0$$

$$EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} = -M_y = -\,M$$

Za rješavanje ovog problema koristićemo obrazac (4.12)

$$\int_0^l \left(EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} \frac{d^2 f_i}{dx^2} \right) - \int_0^l q_z\, f_i dx + \cancelto{0}{\left[f_i EI_y \frac{d^3\overline{w}}{dx^3} \right]_0^l} - \left[\frac{df_i}{dx} EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} \right]_0^l = 0$$

$$\int_0^l \left(EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} \frac{d^2 f_i}{dx^2} \right) - \int_0^l q_z\, f_i dx - \left[\frac{df_i}{dx} EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} \right]_0^l = 0$$

$$\int_0^l \left(EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} \frac{d^2 f}{dx^2} \right) - \int_0^l q_0\, f dx - \left[\frac{df}{dx} EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} \right]_0^l = 0$$

Imamo samo jednu težinsku funkciju.

Težinska funkcija je: $\overline{w}(x) = a_3(x^3 - 2lx^2 + l^2x)$

$$f = (x^3 - 2lx^2 + l^2x) \qquad \frac{df}{dx} = (3x^2 - 4lx + l^2) \qquad \frac{d^2f}{dx^2} = (6x - 4l)$$

$$\frac{d\overline{w}}{dx} = a_3(3x^2 - 4lx + l^2) \quad \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} = a_3(6x - 4l)$$

$$\int_0^l [EI_y a_3(6x - 4l)(6x - 4l)]\,dx - \int_0^l q_0\,(x^3 - 2lx^2 + l^2x)dx - [(3x^2 - 4lx + l^2)(-M)]_{x=0} = 0$$

$$\int_0^l EI_y a_3(36x^2 - 24lx - 24lx + 16l^3)\,dx - \int_0^l q_0\,(x^3 - 2lx^2 + l^2x)dx - [(3x^2 - 4lx + l^2)(-M)]_{x=0} = 0$$

$$EI_y a_3\left(\cancel{36}\frac{x^3}{\cancel{3}} - \cancel{48}\frac{lx^2}{\cancel{2}} + 16l^2x\right)_0^l - q_0\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2lx^3}{3} + \frac{l^2x^2}{2}\right)_0^l + q_0l^4 = 0$$

$$EI_y a_3(12l^3 - 24l^3 + 16l^3) - q_0\left(\frac{l^4}{4} - \frac{2l^4}{3} + \frac{l^4}{2}\right) + q_0l^4 = 0$$

$$EI_y a_3 4l^3 - q_0 \frac{l^4}{12} + q_0 l^4 = 0 \qquad /\cdot \frac{1}{l^3}$$

$$4EI_y a_3 = -\frac{11}{12} q_0 l = 0$$

$$\boxed{a_3 = -\frac{11}{48}\frac{q_0 l}{EI_y}}$$

Uvrštavanjem dobijene vrijednosti u pretpostavljenu funkciju dobija se izraz za ugib

$$\overline{w}(x) = a_3(x^3 - 2lx^2 + l^2 x)$$

$$\boxed{\overline{w}(x) = -\frac{11}{48}\frac{q_0 l}{EI_y}(x^3 - lx^2 + l^2 x)}$$

Raspodjela momenata savijanja:

$$\bar{M}_y = -EI_y \frac{d^2\bar{w}}{dx^2} \qquad \frac{d^2\bar{w}}{dx^2} = a_3(6x - 4l)$$

$$\bar{M}_y = -EI_y a_3(6x - 4l)$$

$$\bar{M}_y = -E\cancel{I}_y\left(-\frac{11}{48}\frac{q_0 l}{E\cancel{I}_y}\right)(6x - 4l)$$

$$\boxed{\bar{M}_y = \frac{11}{48} q_0 l(6x - 4l)}$$