Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Mašinski fakultet Istočno Sarajevo

Numeričke metode u inženjerstvu

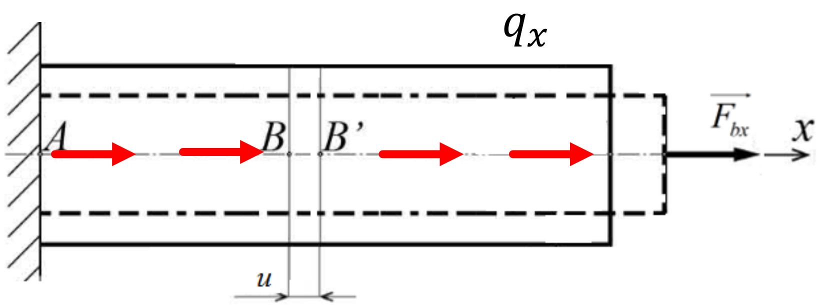
5. Varijacijaka formulacija

5.1 Primjena Rayleigh-Ritzove metode kod aksijalno opterećenog štapa

Doc. dr Dejan Jeremić

5. Varijacijska formulacija

Za rješavanje problema graničnih vrijednosti primjenom varijacijske formulacije potrebno je izvesti ekvivalentni varijacijski funkcional. Funkcional je u matematičkom smislu funkcija određena integralom čiji su argumenti takođe funkcije.
Pokazaćemo izvođenje funkcionala za rješavanje problema aksijalno opterećenog štapa, koji je u diferencijalnoj formulaciji opisan Poissonovom diferencijalnom jednačinom



$$AE \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + q_x = 0 \qquad (5.1)$$

Zadani granični uslovi su:

$x = 0 \qquad u(0) = 0$ -geometrijski ***(Dirichletov)*** konturni uslov ili konturni uslov pomaka

$x = l \qquad AE\dfrac{du}{dx} = F_{bx}$ -prirodni ***(Neumannov)*** konturni uslov ili konturni uslov sila

Polazimo od Poissonove diferencijalne jednačine (5.1) koju je potrebno pomnožiti sa varijacijom njenog rješenja δu i provestri integraciju u području $0 \leq x \leq l$.

$$\int_0^l \left(AE \frac{d^2u}{dx^2} + q_x \right) \delta u dx = 0$$

$$\int_0^l AE \frac{d^2u}{dx^2} \delta u dx + \int_0^l q_x \delta u dx = 0 \qquad (5.2)$$

δu -varijacija pomjeranja u svakoj tački posmatranog štapa

Potrebno je izraz (5.2) transformisati u oblik $\delta F = 0$, gdje je *F* jednak funkcionalu koji odgovara zadanom problemu graničnih vrijednosti.

$\delta F = 0$ -uslov stacionarnosti funkcionala

Ako se na prvi integral primjeni parcijalna integracija, dobija se

$$\int_0^l AE \frac{d^2u}{dx^2} \delta u dx = \left[AE \frac{du}{dx} \delta u \right]_0^l - \int_0^l AE \frac{du}{dx} \frac{d(\delta u)}{dx} dx \qquad (5.3)$$

$$\frac{d(\delta u)}{dx} = \delta \left(\frac{du}{dx} \right), \qquad \frac{1}{2} \delta \left(\frac{du}{dx} \right)^2 = \frac{du}{dx} \delta \left(\frac{\delta u}{dx} \right) \qquad (5.4)$$

Nakon uvrštavanja izraza (5.3) u (5.2) i primjenom jednakosti (5.4), dobijamo

$$\int_0^l AE\frac{d^2u}{dx^2}\delta u dx = \left[AE\frac{du}{dx}\delta u\right]_0^l - \int_0^l AE\frac{du}{dx}\delta\left(\frac{du}{dx}\right)dx$$

$$\int_0^l AE\frac{d^2u}{dx^2}\delta u dx = AE\frac{du}{dx}\Big|_{x=l}\delta u(l) - AE\frac{du}{dx}\Big|_{x=0}\delta u(0) - \int_0^l \frac{1}{2}AE\,\delta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \quad (5.5)$$

Na osnovu graničnih uslova uvrštenih u izraz (5.5) slijedi

$$\int_0^l AE\frac{d^2u}{dx^2}\delta u dx = F_{bx}\delta u(l) - \frac{1}{2}AE\int_0^l \delta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \quad (5.6)$$

Uvrštavanjem izraza (5.6) u izraz (5.2) dobijamo

$$\int_0^l AE\frac{d^2u}{dx^2}\delta u dx + \int_0^l q_x\delta u dx = F_{bx}\delta u(l) - \frac{1}{2}AE\int_0^l \delta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \int_0^l q_x\delta u dx = 0 \quad /(-1) \quad (5.7)$$

$$\frac{1}{2}AE\int_0^l \delta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - F_{bx}\delta u(l) - \int_0^l q_x \delta u dx = 0 \qquad (5.8)$$

$$\delta\left[\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - F_{bx}u(l) - \int_0^l q_x u dx\right] = 0 \qquad (5.9)$$

Iz izraza (5.9) slijedi da je funkcional za rješavanje zadatog problema graničnih vrijednosti jednak

$$\boxed{F\left(x, u, \frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{2}AE\int_0^l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - F_{bx}u(l) - \int_0^l q_x u dx \qquad (5.10)}$$

Iz izraza (5.10) jednak je ukupnoj potencijalnoj energiji koja je izvedena u mehanici deformabilnih tijela. Prvi član jednak je potencijalnoj energiji elastičnog deformisanja, a druga dva člana opisuju potencijalnu energiju spoljnjih sila (q_x, F_{bx}) .

$$\Pi_i = \frac{1}{2}AE\int_0^l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$ -potencijalna energija elastične deformacije (deformacijski rad) (5.11)

$$\Pi_s = -\int_0^l q_x u dx - F_{bx}u(l)$$ -potencijalna energija spoljnjeg opterećenja (5.12)

$$Ad = \Pi_i = \frac{1}{2}\int_V \sigma_x\, \varepsilon_x dV$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$

$$dV = Adx$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_V E\varepsilon_x\, \varepsilon_x Adx = \frac{1}{2}\int_V E\frac{du}{dx}\frac{du}{dx}Adx$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_V AE\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

Na osnovu prethodnog, izvedeni funkcional jednak je

$$F\left(x, u, \frac{du}{dx}\right) = \Pi_i + \Pi_s = \Pi \qquad (5.13)$$

$$\boxed{\Pi = \frac{1}{2}AE\int_0^l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - F_{bx}u(l) - \int_0^l q_x u dx \qquad (5.14)}$$

Prvi izvod funkcionala $\delta F = \delta\Pi = 0$ u mehanici deformabilnih tijela predstavlja princip minimuma potencijalne energije.

5.1 Primjena Rayleigh-Ritzove metode kod aksijalno opterećenog štapa

Rayleigh-Ritzova metoda se zasniva na varijacijskoj formulaciji problema i u njoj je potrebno zadovoljiti uslov stacionarnosti funkcionala koji opisuje razmatrani problem. U ovoj metodi dovoljno je da pretpostavljena funkcija zadovoljava samo geometrijski granični uslov. Nepoznate veličine izračunavaju se iz uslova stacionarnosti funkcionala. Za rješavanje problema u mehanici elastičnih tijela, funkcional je jednak ukupnoj potencijalnoj energiji, a stacionarna vrijednost odgovara njenoj minimalnoj vrijednosti. Vektor zavisnih varijabli jednak je pomaku sa komponenatam u, v, w pravcu u Kartezijevom koordinatnom sistemu.

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{l} a_i f_i(x,y,z),$$
$$\bar{v} = \sum_{i=l+1}^{m} a_i f_i(x,y,z), \qquad (5.15)$$
$$\bar{w} = \sum_{i=m+1}^{n} a_i f_i(x,y,z),$$

Komponente pomaka najčešće se aproksimiraju polinomima ili trigonometrijskim funkcijama. Uvrštavanjem izraza (5.15) u izraz za potencijalnu energiju elastičnog deformisanja (5.11) i potencijalnu energiju spoljašnjih sila (5.12) dobija se ukupna potencijalna energija kao funkcija nezavisnih parametara

$$\Pi = \Pi(a_1, a_2, \ldots., a_n) \qquad (5.16)$$

Princip minimuma ukupne potencijalne energije (ekstremne vrijednosti) opisan je relacijom

$$\partial\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial a_1}\partial a_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial a_2}\partial a_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial\Pi}{\partial a_n}\partial a_n = 0 \qquad (5.17)$$

Iz jednačine (5.17) slijedi ***n*** algebarskih jednačina

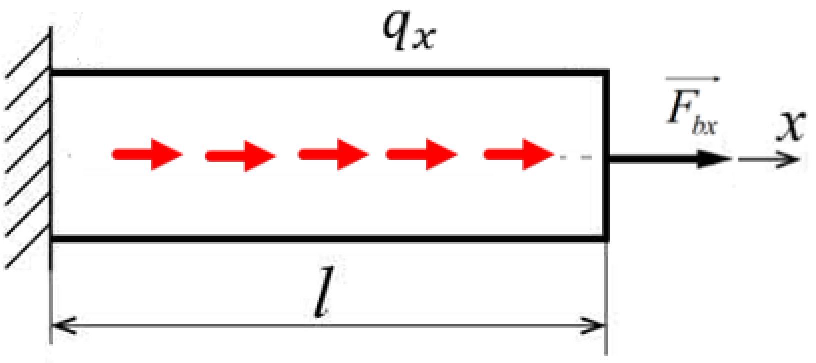
$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_i} = 0, \qquad i = 1,2,3\ldots n \qquad (5.18)$$

Rješenja sistema jednačina (5.18) su nepoznati parametri a_i koji pomoći jednačina (5.15) opisuju polje pomaka u razmatranom području. Na taj način se dobijaju najbolja moguća rješenja za pretpostavljene funkcije, tj. rješenja za koje je potencijalne energija najbliža minimumu. Tačnost rješenja se povećava sa brojem članova u izrazu (5.15). Ako oblik pretpostavljene funkcije odgovara tačnoj raspodjeli pomaka, pomoću izraza (5.18) izračunavaju se nepoznati parametri za koje ukupna potencijalna energija ima minimalnu vrijednost. U tom slučaju uslovi ravnoteže i prirodni granični uslovi koji opisuju granične uslove sila su u potpunosti zadovoljeni.

U opštem slučaju kada su rješenja približna, potencijalna energija ima nešto veću vrijednost od tačnog rješenja koje opisuje minimum, što pokazuje da približna rješenja čine konstrukciju krućom od stvarne konstrukcije. Ovako dobijeni pomaci manji su od stvarnih pomaka.
Uslovi ravnoteže i granični uslovi sila koji su uključeni u funkcional zadovoljeni su samo u prosječnom ili integralnom smislu kad se posmatra cijelo područje, a nisu zadovoljeni u svakoj tački razmatranog kontinuuma, što je slično sa Galerkinovom metodom težinskog reziduala.
Prednost Rayleigh-Ritzove metode u odnosu na Galerkinovu metodu je u tome što se u podintegralnoj funkciji pojavljuju izvodi (derivacije) njižeg reda, a potrebno je zadovoljiti samo geometrijske granične uslove.
Rayleigh-Ritzova metoda se primijeniti samo u slučaju kada se razmatrani problem može opisati funkcionalom.

Radi boljeg razumijevanja, izraze za rješavanju jednodimenzionalnih problema prikazaćemo na primjeru aksijalno opterećenog štapa. Neka je jednodimenzionalni problem opisan Poissonovom diferencijalnom jednačinom koja opisuje aksijalno opterećen štap.

Pretpostavićemo funkciju pomaka u obliku $\bar{u}(x) = f_i(x) a_i, \qquad i = 1,2,3\ldots,n$ (5.19)



$$AE \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + q_x = 0 \qquad (5.20)$$

$$0 \le x \le l$$

$$q_x = const.$$

Zadani granični uslovi su:

$x = 0 \qquad u(0) = 0$ -geometrijski ***(Dirichletov)*** konturni uslov ili konturni uslov pomaka

$x = l \qquad AE\dfrac{du}{dx} = F_{bx}$ -prirodni ***(Neumannov)*** konturni uslov ili konturni uslov sila

Ako je štap po jedinici dužine opterećen uzdužnim kontinualnim opterećenjem q_x , a na jednom kraju je uklješten, odnosno vrijedi da je $u = 0$, a na drugom kraju za $x = l$ djeluje koncentrisana sila F_{bx} , ukupna potencijalna energija prema izrazima (5.11) i (5.12) jednaka je

$$\boxed{\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \int_0^l q_x\, u dx - uF_{bx}|_{x=l}} \qquad (5.21)$$

Uvrštavanjem pretpostavljene funkcije pomaka (5.19), koja je ista kao i za Galerkinovu metodu, ukupna potencijalna energija se (5.7) se može napisati u obliku

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{df_i}{dx}a_i\right)^2 dx - \int_0^l q_x\, f_i a_i dx - f_i a_i F_{bx}|_{x=l} \qquad (5.22)$$

Primjenom derivacije prema izrazu (5.4) dobija se

$$\int_0^l AE\left(\frac{df_j}{dx}a_j\right)\frac{df_i}{dx} dx - \int_0^l q_x\, f_i dx - f_i F_{bx}|_{x=l} = 0 \qquad (5.23)$$

Pošto je izraz u zagradi pod prvim integralom jednak izvodu pretpostavljene funkcije pomaka $\frac{df_j}{dx}a_j = \frac{d\bar{u}}{dx}$, izraz (5.23) možemo napisati u obliku

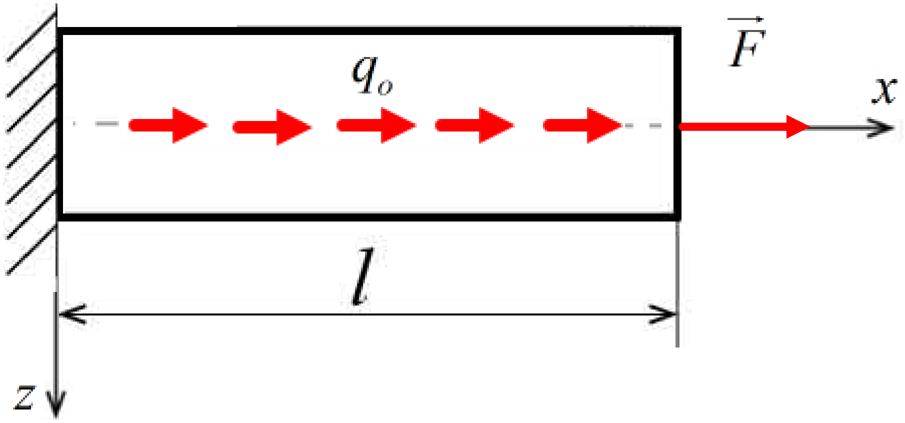
$$\int_0^l \left(AE\frac{d\bar{u}}{dx}\frac{df_i}{dx} - q_x f_i\right)dx - f_i F_{bx}|_{x=l} = 0 \qquad (5.24)$$

Dobijeni izraz potpuno je jednak izrazu (4.5) koji je izveden Galerkinovom metodom za rješavanje problema aksijalno opterećenog štapa.

Primjer 1.

Za aksijalno opterećen štap konstantne aksijalne krutosti $AE = const.$, koji je opterećen kao na slici, potrebno je primjenom Rayleigh-Ritzove metode odrediti funkciju pomaka u pravcu x ose. Za funkciju pomaka pretpostaviti funkciju u obliku polinoma

$$\bar{u}(x) = a_1 x + a_2 x^2$$



Zadano je:

$$AE = const.$$
$$q_0 = const.$$
$$F = \frac{q_0 l}{2}$$

Zadani problem osno opterećenog štapa opisan je jednodimenzionalnom Poissonovom diferencijalnom jednačinom.

$$AE\frac{d^2u}{dx^2} + q_x = 0$$

$$q_x = q_0$$

Kako bismo primjenili Rayleigh-Ritzov metod potrebno je prvo da provjerimo da li pretpostavljena funkcija zadovoljava geometrisjke granične uslove.

Zadani granični uslovi su:

$x = 0 \qquad \bar{u}(0) = a_1 0 + a_2 0^2 = 0 \qquad \bar{u}(0) = 0$

-geometrijski ***(Dirichletov)*** konturni uslov ili konturni uslov pomaka

Funkcija pomaka zadovoljava geometrijske granične uslove.

Za rješavanje ovog problema koristićemo obrazac (5.21)

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \int_0^l q_x\, u dx - uF_{bx}|_{x=l}$$

Supstitucijom $q_x = q_0$ dobijamo

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{d\bar{u}}{dx}\right)^2 dx - \int_0^l q_0\, \bar{u} dx - \bar{u}F_{bx}|_{x=l}$$

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_s$$

Potencijalna energija elastičnog deformisanja (deformacijski rad)

$$\Pi_i = \frac{1}{2} AE \int_0^l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = a_1 + 2a_2 x$$

$$\left(\frac{d\bar{u}}{dx}\right)^2 = a_1^2 + 4a_1 a_2 x + 4a_2^2 x^2$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2} AE \int_0^l (a_1^2 + 4a_1 a_2 x + 4a_2^2 x^2) dx$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2} AE \left[a_1^2 x + 4a_1 a_2 \frac{x^2}{2} + 4a_2^2 \frac{x^3}{3} \right]_0^l$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2} AE \left(a_1^2 l + \cancel{4} a_1 a_2 \frac{l^2}{\cancel{2}} + 4a_2^2 \frac{l^3}{3} \right)$$

Potencijalna energija spoljašnjeg opterećenja

$$\Pi_s = -\int_0^l q_x u dx - F_{bx}u(l)$$

$$\bar{u}(x) = a_1 x + a_2 x^2 \qquad \bar{u}(l) = a_1 l + a_2 l^2$$

$$\Pi_s = -\int_0^l q_0(a_1 x + a_2 x^2)dx - F(a_1 l + a_2 l^2)$$

$$\Pi_s = -q_0\left[a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3}\right]_0^l - F(a_1 l + a_2 l^2)$$

$$\Pi_s = -q_0\left(a_1\frac{l^2}{2} + a_2\frac{l^3}{3}\right) - F(a_1 l + a_2 l^2) \qquad F = \frac{q_0 l}{2}$$

$$\Pi_s = -\frac{1}{2}\underline{a_1}q_0 l^2 - \frac{1}{3}\underline{a_2}q_0 l^3 - \frac{1}{2}\underline{a_1}q_0 l^2 - \frac{1}{2}\underline{a_2}q_0 l^3$$

$$\Pi_s = -a_1 q_0 l^2 - \frac{5}{6}a_2 q_0 l^3$$

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_s = \frac{1}{2}AE\left(a_1^2 l + \cancel{4}a_1 a_2 \frac{l^2}{\cancel{2}} + 4a_2^2 \frac{l^3}{3}\right) - a_1 q_0 l^2 - \frac{5}{6}a_2 q_0 l^3$$

Iz uslova $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0$ $\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0$ slijedi

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = \frac{1}{\cancel{2}}AE(\cancel{2}a_1 l + \cancel{2}a_2 l^2) - q_0 l^2 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = \frac{1}{\cancel{2}}AE\left(\cancel{2}a_1 l^2 + \frac{\cancel{8}}{3}a_2 l^3\right) - \frac{5}{6}q_0 l^3 = 0$$

$$a_1 l + a_2 l^2 = \frac{q_0 l^2}{AE} \quad / \cdot (-l) \qquad \text{(jednačina 1)}$$

$$a_1 l^2 + \frac{4}{3}a_2 l^3 = \frac{5}{6}\frac{q_0 l^3}{AE} \qquad \text{(jednačina 2)}$$

$$-\cancel{a_1 l^2} - a_2 l^3 = -\frac{q_0 l^3}{AE}$$

$+$

$$\cancel{a_1 l^2} + \frac{4}{3}a_2 l^3 = \frac{5}{6}\frac{q_0 l^3}{AE}$$

$$-a_2 l^3 + \frac{4}{3} a_2 l^3 = -\frac{q_0 l^3}{AE} + \frac{5}{6}\frac{q_0 l^3}{AE}$$

$$\frac{1}{\cancel{3}} a_2 \cancel{l^3} = -\frac{1}{\cancel{6}}\frac{q_0 \cancel{l^3}}{AE}$$

$$\boxed{a_2 = -\frac{1}{2}\frac{q_0}{AE}}$$

Ako dobijenu vrijednost uvrstimo u jednačinu 1 dobijamo

$$a_1 \cancel{l} - \frac{1}{2}\frac{q_0}{AE} \cancel{l^2} = \frac{q_0 \cancel{l^2}}{AE}$$

$$a_1 = \frac{q_0 l}{AE} + \frac{1}{2}\frac{q_0 l}{AE}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{3}{2}\frac{q_0 l}{AE}}$$

Uvrštavanjem dobijenih vrijednosti u pretpostavljenu funkciju dobija izraz za pomak

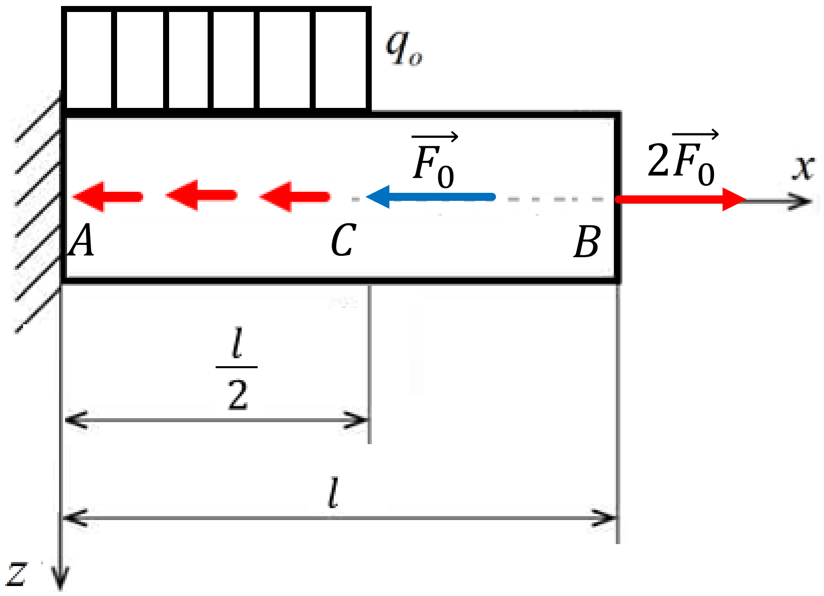
$$\boxed{\bar{u}(x) = \frac{3}{2}\frac{q_0 l}{AE} x - \frac{1}{2}\frac{q_0}{AE} x^2}$$

Dobijena izraz za pomak primjenom Rayleigh-Ritzovog metoda identičan je izrazu dobijenom primjenom Galerkinove metode.

Primjer 2.

Za aksijalno opterećen štap konstantne aksijalne krutosti $AE = const.$, koji je opterećen kao na slici, potrebno je primjenom Rayleigh-Ritzove metode odrediti raspored pomaka i uzdužne sile. Za funkciju pomaka pretpostaviti funkciju u obliku polinoma

$$\bar{u}(x) = a_1 x + a_2 x^2$$



Zadano je:

$$AE = const.$$
$$q_0 = const.$$

$$F_0 = q_0 l$$

Kako bismo primjenili Rayleigh-Ritzov metod potrebno je prvo da provjerimo da li pretpostavljena funkcija zadovoljava geometrisjke granične uslove.

Zadani granični uslovi su:

$x = 0 \qquad \bar{u}(0) = a_1 0 + a_2 0^2 = 0 \qquad \bar{u}(0) = 0$ -geometrijski ***(Dirichletov)*** konturni uslov ili konturni uslov pomaka

$q_x = -q_o$

Funkcija pomaka zadovoljava geometrijske granične uslove.

Za rješavanje ovog problema koristićemo obrazac (5.21) koji proširujemo za jedan član jer na štap djeluju dvije sile i mijenjamo granice integracije za kontinualno opterećenje

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \int_0^{\frac{l}{2}} q_x\, u dx - uF_{bx}\big|_{x=\frac{l}{2}} - uF_{bx}\big|_{x=l}$$

Supstitucijom $q_x = -q_0$ dobijamo

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{d\bar{u}}{dx}\right)^2 dx - \int_0^{\frac{l}{2}} -q_0\, \bar{u} dx - [\bar{u}(-F_o)]_{x=\frac{l}{2}} - [\bar{u}2F_o]_{x=l}$$

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_s$$

Potencijalna energija elastičnog deformisanja (deformacijski rad)

$$\Pi_i = \frac{1}{2} AE \int_0^l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = a_1 + 2a_2 x \qquad \left(\frac{d\bar{u}}{dx}\right)^2 = a_1^2 + 4a_1 a_2 x + 4a_2^2 x^2$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2} AE \int_0^l (a_1^2 + 4a_1 a_2 x + 4a_2^2 x^2) dx$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2} AE \left[a_1^2 x + 4a_1 a_2 \frac{x^2}{2} + 4a_2^2 \frac{x^3}{3}\right]_0^l$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2} AE \left(a_1^2 l + \cancel{4} a_1 a_2 \frac{l^2}{\cancel{2}} + 4a_2^2 \frac{l^3}{3}\right)$$

Potencijalna energija spoljašnjeg opterećenja

$$\Pi_s = -\int_0^{\frac{l}{2}} -q_0\bar{u}dx - [\bar{u}(-F_o)]_{x=\frac{l}{2}} - [\bar{u}2F_o]_{x=l}$$

$$\bar{u}(x) = a_1x + a_2x^2 \qquad \bar{u}(l) = a_1l + a_2l^2 \qquad F_0 = q_0l$$

$$\Pi_s = \int_0^{\frac{l}{2}} q_0(a_1x + a_2x^2)dx + [(a_1x + a_2x^2)(F_o)]_{x=\frac{l}{2}} - [(a_1x + a_2x^2)(2F_o)]_{x=l}$$

$$\Pi_s = q_0\left[a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{l}{2}} + F_o(a_1\frac{l}{2} + a_2\frac{l^2}{4}) - 2F_o(a_1l + a_2l^2)$$

$$\Pi_s = q_0\left(a_1\frac{l^2}{8} + a_2\frac{l^3}{24}\right) + q_0l(a_1\frac{l}{2} + a_2\frac{l^2}{4}) - 2q_0l(a_1l + a_2l^2)$$

$$\Pi_s = -\frac{11}{8}a_1q_0l^2 - \frac{41}{24}a_2q_0l^3$$

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_s = \frac{1}{2} AE \left(a_1^2 l + \cancel{4} a_1 a_2 \frac{l^2}{\cancel{2}} + 4 a_2^2 \frac{l^3}{3} \right) - \frac{11}{8} a_1 q_0 l^2 - \frac{41}{24} a_2 q_0 l^3$$

Iz uslova $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0$ $\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0$ slijedi

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = \frac{1}{\cancel{2}} AE(\cancel{2} a_1 l + \cancel{2} a_2 l^2) - \frac{11}{8} q_0 l^2 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = \frac{1}{\cancel{2}} AE \left(\cancel{2} a_1 l^2 + \frac{\cancel{8}}{3} a_2 l^3 \right) - \frac{41}{24} q_0 l^3 = 0$$

$$a_1 l + a_2 l^2 = \frac{11}{8} q_0 l^2 \quad / \cdot (-l)$$ (jednačina 1)

$$a_1 l^2 + \frac{4}{3} a_2 l^3 = \frac{41}{24} q_0 l^3$$ (jednačina 2)

$$-\cancel{a_1 l^2} - a_2 l^3 = -\frac{11}{8} q_0 l^3$$

$+$

$$\cancel{a_1 l^2} + \frac{4}{3} a_2 l^3 = \frac{41}{24} q_0 l^3$$

$$-a_2 l^3 + \frac{4}{3} a_2 l^3 = -\frac{11}{8} q_0 l^3 + \frac{41}{24} q_0 l^3$$

$$\frac{1}{\cancel{3}} a_2 \cancel{l^3} = -\frac{\cancel{8}}{\cancel{24}} \frac{q_0 \cancel{l^3}}{AE}$$

$$\boxed{a_2 = \frac{q_0}{AE}}$$

Ako dobijenu vrijednost uvrstimo u jednačinu 1 dobijamo

$$a_1 \cancel{l} + \frac{q_0}{AE} l^{\cancel{2}} = \frac{11}{8} q_0 l^{\cancel{2}}$$

$$a_1 = \frac{11}{8} q_0 l^2 - \frac{q_0 l^2}{AE}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{3}{8} \frac{q_0 l}{AE}}$$

Uvrštavanjem dobijenih vrijednosti u pretpostavljenu funkciju dobija izraz za pomak

$$\boxed{\bar{u}(x) = \frac{3}{8} \frac{q_0 l}{AE} x + \frac{q_0}{AE} x^2}$$

Raspodjela uzdužne sile

$$\bar{N}_x = AE\frac{d\bar{u}}{dx}$$

$$\bar{N}_x = \cancel{A}E\left(\frac{3}{8}\frac{q_0 l}{\cancel{A}E} + 2\frac{q_0}{\cancel{A}E}x\right)$$

$$\boxed{\bar{N}_x = \frac{3}{8}q_0 l + 2q_0 x}$$