Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Mašinski fakultet Istočno Sarajevo

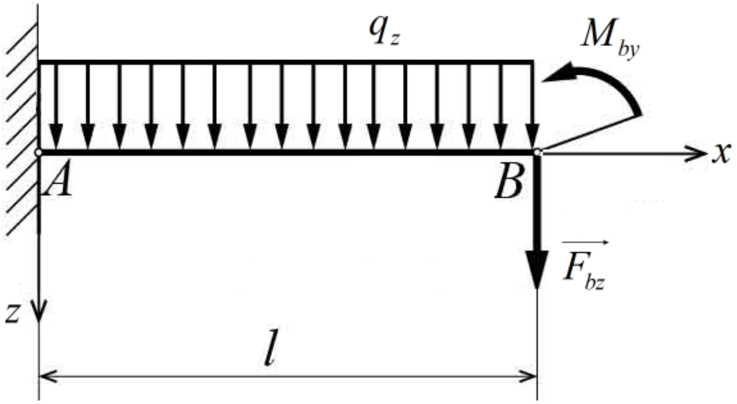
Numeričke metode u inženjerstvu

5.1 Primjena Rayleigh-Ritzove metode kod grede opterećene na savijanje

Doc. dr Dejan Jeremić

5.2 Primjena Rayleigh-Ritzove metode kod grede opterećene na savijanje

Analognim postupkom kao kod aksijalno opterećenog štapa izvodi se relacija za rješavanje problema savijanja grede. Pošto je diferencijalna jednačina kojom je definisan matematički model savijanja grede četvrtog reda potrebna su nam četiri konturna uslova da bismo u potpunosti riješili posmatrani problem. Neophodno je da pretpostavljena funkcija zadovolji geometrijske konturne uslove, a prirodni konturni uslovi će biti obuhvaćeni izvedenom relaciiom.



I $\boxed{w(0) = 0}$

II $\boxed{\frac{dw}{dx}(0) = 0}$

-geometrijski ***(Dirichletov)*** konturni uslov ili konturni uslov pomaka

III $\boxed{EI_y \frac{d^2w}{dx^2}(l) = -M_{by}}$

-prirodni ***(Neumannov)*** konturni uslov ili konturni uslov sila i momenta

IV $\boxed{EI_y \frac{d^3w}{dx^3}(l) = -F_{bz}}$

Polazimo od diferencijalne jednačine savijanja grede koju je potrebno pomnožiti sa varijacijom njenog rješenja δw i provestri integraciju u području $0 \leq x \leq l$

$$\int_0^l \left(EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} - q_z \right) \delta w dx = 0$$

$$\int_0^l EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} \delta w dx + \int_0^l q_z \delta w dx = 0 \qquad (5.25)$$

δw -varijacija pomjeranja u svakoj tački posmatranog štapa

Ako se na prvi integral u jednačini (5.25) primjeni dva puta parcijalna integracija i poslije toga transformacione izraze varijacionog računa, dobićemo izraz za ukupnu potencijalnu energiju sistema prikazanog na prethodnoj slici

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l q_z w dx + [-F_{bz} w]_{x=l} - \left[-M_{by} \frac{dw}{dx} \right]_{x=l} \qquad (5.26)$$

Prvi član jednak je potencijalnoj energiji elastičnog deformisanja, a druga dva člana opisuju potencijalnu energiju spoljnjih sila.

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^l EI_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \qquad (5.27)$$

$$\Pi_s = -\int_0^l q_z w dx - [F_{bz} w]_{x=l} - \left[-M_{by} \frac{dw}{dx} \right]_{x=l} \qquad (5.28)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI_y\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^l q_z w dx - [F_{bz}w]_{x=l} + \left[M_{by}\frac{dw}{dx}\right]_{x=l} \qquad (5.29)$$

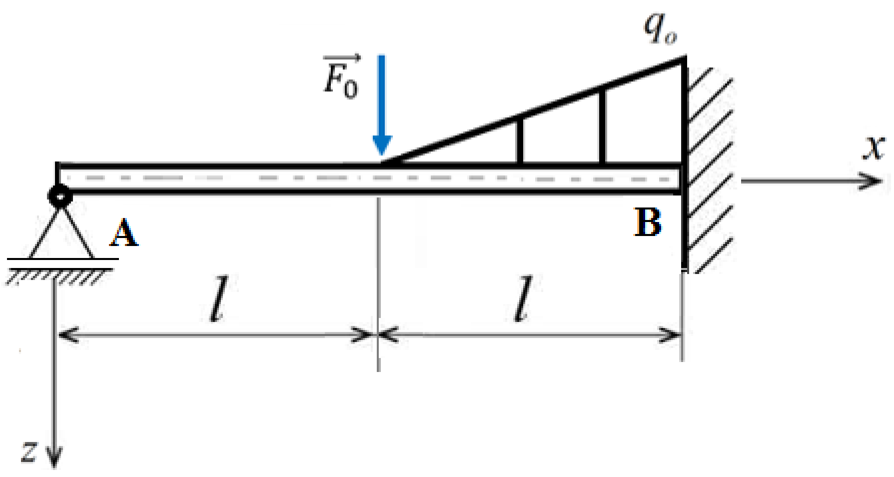
Ako je funkcija pomaka opisana relacijom $\overline{w}(x) = f_i(x)a_i$, primjenom principa minimuma ukupne potencijalne energije $\delta\Pi = 0$ i uvrštavanjem u jednačinu (5.29) dobijamo

$$\int_0^l \left(EI_y \frac{d^2\overline{w}}{dx^2}\frac{d^2 f_i}{dx^2}\right) - \int_0^l q_z\, f_i dx - [f_i F_{bz}]_0^l + \left[\frac{df_i}{dx}M_{by}\right]_0^l = 0 \qquad (5.30)$$

Izraz (5.30) je identičan izrazu (4.12). Na ovaj način je prikazano da uz pretpostavku istih funkcija pomaka, pomoću Galerkinove i Rayleigh-Ritzove metode uz primjenu parcijalne integracije dobijaju jednaka rješenja.

Primjer 1.
Za nosač zadan i opterećen prema slici potrebno je primjenom Rayleigh-Ritzove metode odrediti raspodjelu pomaka i momenata savijanja..
Za funkciju pomaka pretpostaviti funkciju u obliku

$$\overline{w}(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4$$



Zadano je:

$$EI_y = const.$$
$$F_0 = 2q_0 l$$
$$q_0$$
$$l$$

Kako bismo primjenili Rayleigh-Ritzov metod potrebno je prvo da provjerimo da li pretpostavljena funkcija zadovoljava geometrisjke granične uslove.

Provjera graničnih uslova:

Geometrijski ***(Dirichletov)*** konturni uslov ili konturni uslov pomaka

$$\overline{w}(x) = a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4$$

$$x = 0 \quad \overline{w}(0) = a_1 0^2 + a_2 0^3 + a_3 0^4 \quad \overline{w}(0) = 0$$

$$x = 2l \quad \overline{w}(2l) = 4a_1 l^2 + 8a_2 l^3 + 16a_3 l^4 = 0 \Longrightarrow a_1 = -2a_2 l - 4a_3 l^2$$ -dodatni uslov (1)

$$\frac{d\overline{w}}{dx}(x) = 2a_1 x + 3a_2 x^2 + 4a_3 x^3$$

$$\frac{d\overline{w}}{dx}(2l) = 4a_1 l + 12a_2 l^2 + 32a_3 l^3 \Longrightarrow a_1 = -3a_2 l - 8a_3 l^2$$ -dodatni uslov (2)

Funkcija zadovoljava uz dodatne uslove (1) i (2)!

Iz dodatnih uslova slijedi:

$$-2a_2 l - 4a_3 l^2 = -3a_2 l - 8a_3 l^2$$

$$-2a_2 l + 3a_2 l = 4a_3 l^2 - 8a_3 l^2$$

$$a_2 l = -4a_3 l^2 \quad / \cdot \frac{1}{l}$$

$$\boxed{a_2 = -4a_3 l}$$ -dodatni uslov (3)

Ako a_2 vratimo u dodatni uslov (2) dobijamo

$$a_1 = -3(-4a_3 l)l - 8a_3 l^2$$

$$a_1 = 12a_3 l^2 - 8a_3 l^2$$

$$\boxed{a_1 = 4a_3 l^2}$$ -dodatni uslov (4)

Ako se vratimo u pretpostavljenu funkciju dobijamo:

$$\bar{w}(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4$$

$$\bar{w}(x) = 4a_3 l^2 x^2 + (-4a_3 l)x^3 + a_3 x^4$$

$$\boxed{\bar{w}(x) = a_3(4l^2x^2 - 4lx^3 + x^4)}$$

Raspodjela opterećenja i izvodi pretpostavljene funkcije

$$q_z = q_0\left(\frac{x}{l} - 1\right)$$

$$\frac{d\bar{w}}{dx} = a_3(8l^2x - 12lx^2 + 4x^3) \qquad \frac{d^2\bar{w}}{dx^2} = a_3(8l^2 - 24lx + 12x^2)$$

Za rješavanje ovog problema koristićemo obrazac (5.29) vodeći računa o granicama integracije i opterećenjima

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{0}^{l} EI_y\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx - \int_{0}^{l} q_z w dx - [F_{bz}w]_{x=l} + \cancelto{0}{\left[M_{by}\frac{dw}{dx}\right]_{x=l}}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{0}^{2l} EI_y\left(\frac{d^2\overline{w}}{dx^2}\right)^2 dx - \int_{l}^{2l} q_0\left(\frac{x}{l} - 1\right)\overline{w} dx - [F_0\overline{w}]_{x=l}$$

$a)$ $b)$ $c)$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{0}^{2l} EI_y[a_3(8l^2 - 24lx + 12x^2)]^2 dx - \int_{l}^{2l} q_0\left(\frac{x}{l} - 1\right)a_3(4l^2x^2 - 4lx^3 + x^4)dx - [2q_0la_3(4l^2x^2 - 4lx^3 + x^4)]_{x=l}$$

$a)$

$$[(8l^2 - 24lx + 12x^2)^2]dx =$$

$$[(8l^2)^2 + (-24lx)^2 + (12x^2)^2 + 2(8l^2)(-24lx) + 2(8l^2)(12x^2) + 2(-24lx)(12x^2)]dx =$$

$$(64l^4 + 576l^2x^2 + 144x^4 - 384l^3x + 192l^2x^2 - 576lx^3)dx =$$

$$\left[64l^4x + \frac{576}{3}l^2x^3 + \frac{144}{5}x^5 - \frac{384}{2}l^3x^2 + \frac{192}{3}l^2x^3 - \frac{576}{4}lx^4\right]_0^{2l} =$$

$$64l^4 2l + \frac{576}{3}l^2(2l)^3 + \frac{144}{5}(2l)^5 - \frac{384}{2}l^3(2l)^2 + \frac{192}{3}l^2(2l)^3 - \frac{576}{4}l(2l)^4 =$$

$$128l^5 + 1536l^5 + \frac{4608}{5}l^5 - 768l^5 + 512l^5 - 2304l^5 =$$

$$\frac{128}{5}l^5$$

$b)$

$$\int_{l}^{2l} q_0\left(\frac{x}{l}-1\right)a_3(4l^2x^2-4lx^3+x^4)dx=$$

$$q_0a_3\left(\frac{4l^2x^3}{l}-\frac{4lx^4}{l}+\frac{x^5}{l}-4l^2x^2+4lx^3-x^4\right)dx=$$

$$q_0a_3\left[\frac{\cancel{4}l^2x^4}{\cancel{4}l}-\frac{\cancel{4}lx^5}{5\cancel{l}}+\frac{x^6}{6l}-\frac{4}{3}l^2x^3+\frac{\cancel{4}lx^4}{\cancel{4}}-\frac{x^5}{5}\right]_l^{2l}=$$

$$q_0a_3\left\{\left[l(2l)^4-\frac{4(2l)^5}{5}+\frac{(2l)^6}{6l}-\frac{4l^2(2l)^3}{3}+l(2l)^4-\frac{(2l)^5}{5}\right]-\left[l(l)^4-\frac{4(l)^5}{5}+\frac{(l)^6}{6l}-\frac{4l^2(l)^3}{3}+l(l)^4-\frac{(l)^5}{5}\right]\right\}=$$

$$q_0a_3\left[0-\left(-\frac{\cancel{5}}{\cancel{30}}l^5\right)\right]=$$

$$\frac{1}{6}a_3q_0l^5$$

$c)$

$$[2q_0 l a_3(4l^2x^2 - 4lx^3 + x^4)]_{x=l} =$$

$$[2a_3 q_0(4l^3x^2 - 4l^2x^3 + lx^4)]_{x=l} =$$

$$2a_3 q_0(4l^5 - 4l^5 + l^5) =$$

$$2a_3 q_0 l^5$$

Ako se vratimo u izraz za ukupnu potencijalnu energiju dobijamo:

$$\Pi = \frac{1}{2} a_3^2 E I_y \frac{128}{5} l^5 - \frac{1}{6} a_3 q_0 l^5 - 2a_3 q_0 l^5$$

Na osnovu principa minimuma potencijalne energije dobijamo

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = a_3 E I_y \frac{128}{5} l^5 - \frac{1}{6} q_0 l^5 - 2q_0 l^5 = 0$$

$$\boxed{a_3 = \frac{65}{768} \frac{q_0}{E I_y}}$$

Kada dobijenu vrijednost koeficijenta vratimo u pretpostavljenu funkciju dobijamo raspodjelu pomaka

$$\bar{w}(x) = \frac{65}{768}\frac{q_0}{EI_y}(4l^2x^2 - 4lx^3 + x^4)$$

$$\boxed{\bar{w}(x) = \frac{65}{768}\frac{q_0 l^4}{EI_y}\left[4\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 4\left(\frac{x}{l}\right)^4\right]}$$

Raspodjela momenata savijanja

$$\bar{M}_y = -EI_y\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}$$

$$\frac{d^2\bar{w}}{dx^2} = a_3(8l^2 - 24lx + 12x^2)$$

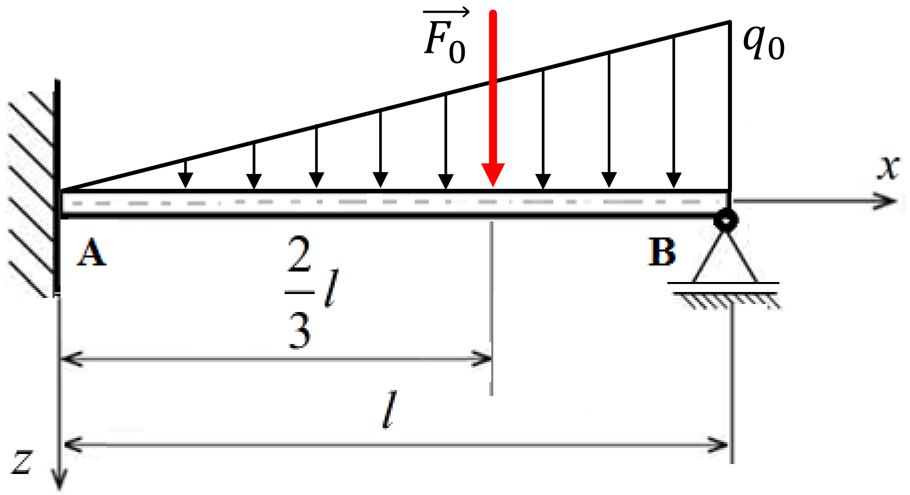
$$\bar{M}_y = -\cancel{EI}_y\frac{65}{768}\frac{q_0}{\cancel{EI}_y}(8l^2 - 24lx + 12x^2)$$

$$\boxed{\bar{M}_y = -\frac{65}{768}q_0 l^2\left[8 - 24\left(\frac{x}{l}\right) + 12\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]}$$

Primjer 2.

Za nosač zadan i opterećen prema slici potrebno je primjenom Rayleigh-Ritzove metode odrediti ugib na mjestu djelovanja sile i raspodjelu momenata savijanja.. Za funkciju pomaka pretpostaviti funkciju u obliku

$$\bar{w}(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3$$



Zadano je:

$EI_y = const.$

$F_0 = 2q_0 l$

q_0

l

Kako bismo primjenili Rayleigh-Ritzov metod potrebno je prvo da provjerimo da li pretpostavljena funkcija zadovoljava geometrisjke granične uslove.

Provjera graničnih uslova:

Geometrijski ***(Dirichletov)*** konturni uslov ili konturni uslov pomaka

$$\bar{w}(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3$$

$x = 0 \quad \bar{w}(0) = a_1 0^2 + a_2 0^3 \qquad \bar{w}(0) = 0$

$x = l \quad \bar{w}(l) = a_1 l^2 + a_2 l^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -a_2 l$ -dodatni uslov

$$\frac{d\bar{w}}{dx}(x) = 2a_1 x + 3a_2 x^2$$

$$\frac{d\bar{w}}{dx}(0) = 2a_1 0 + 3a_2 0^2 = 0$$

Funkcija zadovoljava uz dodatne uslove!

Ako se vratimo u pretpostavljenu funkciju dobijamo:

$$\bar{w}(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3$$

$$\bar{w}(x) = -a_2 l x^2 + a_2 x^3$$

$$\boxed{\bar{w}(x) = a_2(x^3 - l x^2)}$$

Raspodjela opterećenja i izvodi pretpostavljene funkcije

$$q_z = q_0\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$\frac{d\overline{w}}{dx} = a_2(3x^2 - 2lx) \qquad\qquad \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} = a_2(6x - 2l)$$

Funkcional za zadanu gredu je

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI_y\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^l q_z w\,dx - [F_{bz}w]_{x=\frac{2}{3}l} + \cancelto{0}{\left[M_{by}\frac{dw}{dx}\right]_{x=l}}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI_y\left(\frac{d^2\overline{w}}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^l q_0\left(\frac{x}{l}\right)\overline{w}\,dx - [F_0\overline{w}]_{x=\frac{2}{3}l}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI_y[a_2(6x-2l)]^2\,dx - \int_0^l q_0\left(\frac{x}{l}\right)a_2(x^3 - lx^2)dx - [2q_0la_2(x^3 - lx^2]_{x=\frac{2}{3}l}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI_y[a_2(6x-2l)]^2\,dx - \int_0^l q_0\left(\frac{x}{l}\right)a_2(x^3-lx^2)dx - [2q_0 l a_2(x^3-lx^2]_{x=\frac{2}{3}l}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI_y[a_2^2(36x^2-24lx+4l^2)]\,dx - \frac{a_2q_0}{l}\int_0^l (x^4-lx^3)dx - 2a_2q_0l\left[\left(\frac{2}{3}l\right)^3 - l\left(\frac{2}{3}l\right)^2\right]$$

$$\Pi = \frac{1}{2}EI_ya_2^2\left[\cancel{36}\frac{x^3}{\cancel{3}} - \cancel{24}l\frac{x^2}{\cancel{2}} + 4l^2x\right]_0^l - \frac{a_2q_0}{l}\left[\frac{x^5}{5} - l\frac{x^4}{4}\right]_0^l - 2a_2q_0l\left[\left(\frac{2}{3}l\right)^3 - l\left(\frac{2}{3}l\right)^2\right]$$

$$\Pi = \frac{1}{2}EI_ya_2^2(12l^3-12l^3+4l^3) - \frac{a_2q_0}{l}\left(\frac{l^5}{5}-\frac{l^5}{4}\right) - 2a_2q_0l\left(\frac{8}{27}l^3-\frac{4}{9}l^3\right)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}EI_ya_2^2(\cancel{12l^3}-\cancel{12l^3}+4l^3) - \frac{a_2q_0}{l}\left(\frac{l^5}{5}-\frac{l^5}{4}\right) - 2a_2q_0l\left(\frac{8}{27}l^3-\frac{4}{9}l^3\right)$$

$$\Pi = 2EI_ya_2^2l^3 + \frac{a_2q_0l^4}{20} + \frac{8a_2q_0l^4}{27}$$

Na osnovu principa minimuma potencijalne energije dobijamo

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 4EI_y a_2 l^3 + \frac{q_0 l^4}{20} + \frac{8 q_0 l^4}{27} = 0$$

$$\boxed{a_2 = -\frac{187}{2160}\frac{q_0 l}{EI_y}}$$

Kada dobijenu vrijednost koeficijenta vratimo u pretpostavljenu funkciju dobijamo raspodjelu pomaka

$$\bar{w}(x) = -\frac{187}{2160}\frac{q_0 l}{EI_y}(x^3 - lx^2)$$

$$\boxed{\bar{w}(x) = -\frac{187}{2160}\frac{q_0 l^4}{EI_y}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]}$$

$$\bar{w}\left(\frac{2}{3}l\right) = -\frac{187}{2160}\frac{q_0 l^4}{EI_y}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right]$$

$$\bar{w}\left(\frac{2}{3}l\right) = -\frac{748}{58320}\frac{q_0 l^4}{EI_y}$$

Raspodjela momenata savijanja

$$\bar{M}_y = -EI_y \frac{d^2\bar{w}}{dx^2}$$

$$\frac{d^2\bar{w}}{dx^2} = a_2(6x - 2l)$$

$$\bar{M}_y = -\cancel{EI_y}\left(-\frac{187}{2160}\frac{q_0 l}{\cancel{EI_y}}\right)(6x - 2l)$$

$$\bar{M}_y = \frac{187}{2160} q_0 l(6x - 2l)$$

$$\boxed{\bar{M}_y = \frac{187}{2160} q_0 l^2 \left[-2 + 6\frac{x}{l}\right]}$$