Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Mašinski fakultet Istočno Sarajevo

# Numeričke metode u inženjerstvu

## 6.Metoda konačnih razlika (MKR)
## 6.1 Rješavanje problema aksijalno opterećenog štapa primjenom MKR

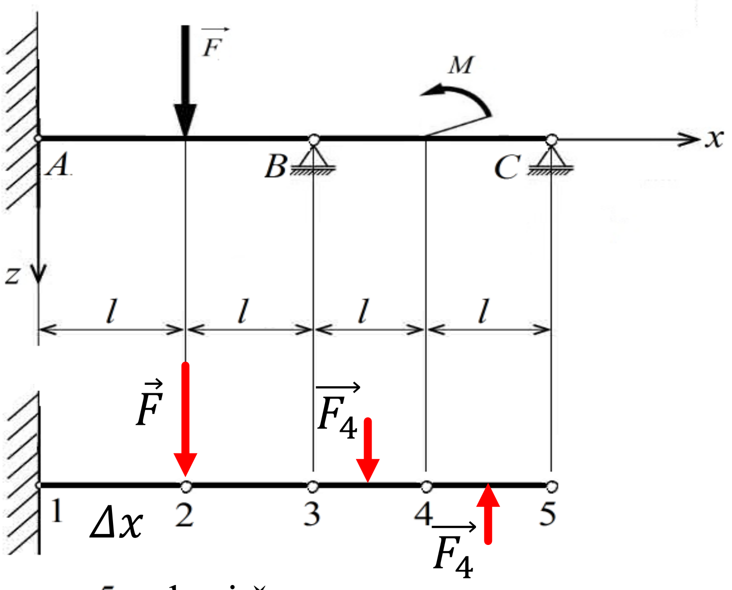
Doc. dr Dejan Jeremić

Najstarija diskretizacijska metoda je ***metoda konačnih razlika (MKR)*** koja je svoju pravu primjenu našla sa razvojem računara. Metoda konačnih razlika je numerička metoda koja služi za rješavanje problema mehanike deformabilnih tijela, mehanike fluida, prenosa toplote, tj. za rješavanje problema koji su matematički modelirani diferencijalnim jednačinama.

Nedostatak ove metode se ogleda u tome da je za složenije probleme veoma teško opisati granične (konturne) uslove, a to posebno dolazi do izražaja ako su u granične uslove uključene derivacije višeg reda. Danas se ova metoda uglavnom primjenjuje za rješavanje problema u mehanici fluida i za vremensku diskretizaciju pri rješavanju nestacionarnih problema. U mehanici deformabilnih tijela primjenjuje se samo za rješavanje jednostavnih problema.

MKR se temelji na diskretizaciji razmatranog područja disketnim tačkama (čvorovima) koje čine mrežu konačnih razlika. Za svaki čvor se dobija jedna algebarska diferencijalna jednačina koja povezuje nepoznatu vrijednost u čvoru sa vrijednostima te varijable u odgovarajućem broju susjednih čvorova.

U tačkama se postavljaju diferencijalne jednačine pri čemu se derivacije (izvodi) zamjenjuju konačnim razlikama koje se opisuju vrijednostima zavisnih varijabli u susjednim čvorovima.



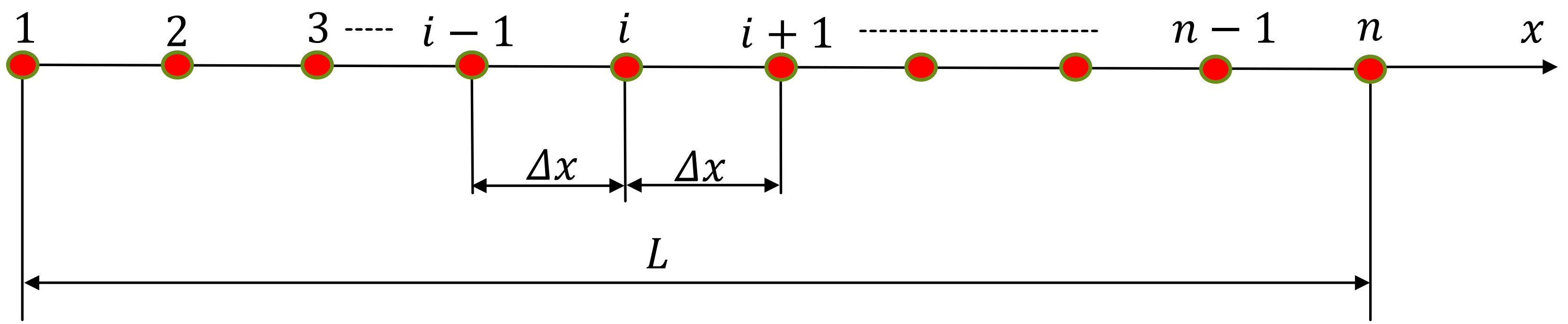

$n = 5$ -broj čvorova

$$w_1 = 0$$
$$w_3 = 0 \quad \text{-vertikalno pomjeranje u čvorovima}$$
$$w_5 = 0$$

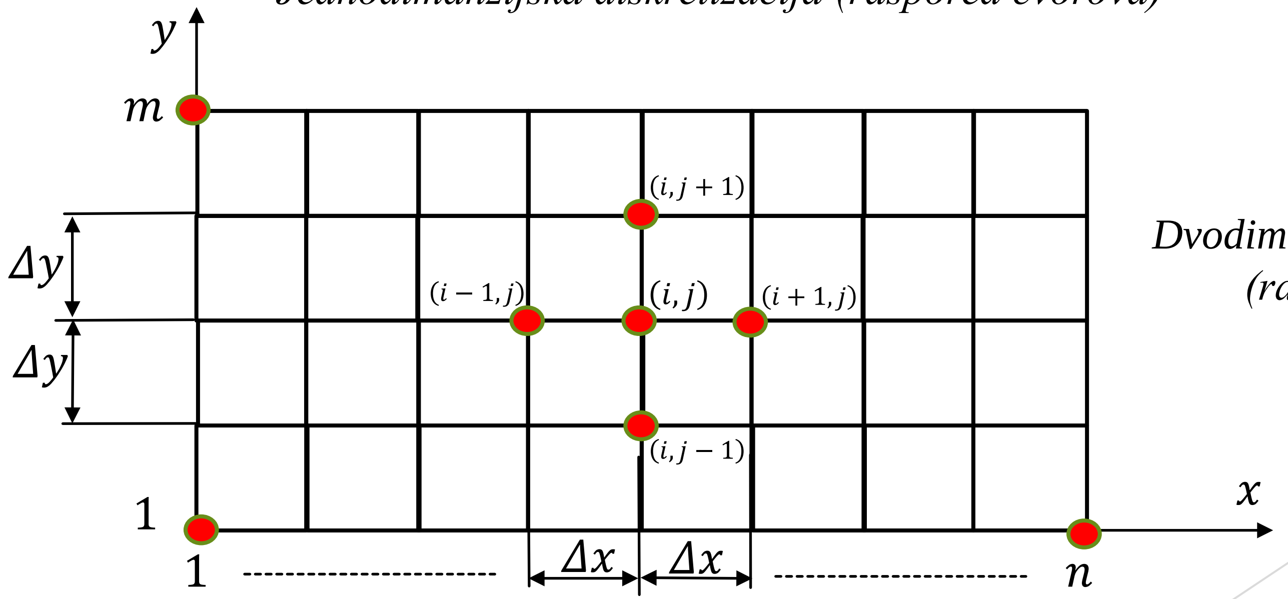
Dobija se sistem algebarskih jednačina čija su rješenja vrijednosti varijabli u čvorovima. Rješenja za područja između čvorova po pravilu nije moguće dobiti jer se metoda ne temelji na aproksimacijskim funkcijama.

Svakom čvoru je potrebno aproksimirati diferencijalnu jednačinu određenim izrazima koji su karakteristični za MKR. Broj obuhvaćenih čvorova zavisi od reda izvoda u diferencijalnoj jednačini. Na taj način se dobija sistem linearnih algebarskih jednačina čiji je broj jednak broju čvorov, odnosno nepopoznatih.

Diferencijalna jednačina se transformiše u tzv. diferencijsku jednačinu (linearnu algebarsku jednačinu). Svakom čvoru za koji se izvodi diskretizovana jednačina pridruženi su indeksi koji se povećavaju, odnosno smanjuju u susjednim čvorovima.




*Jednodimanzijska diskretizacija (raspored čvorova)*



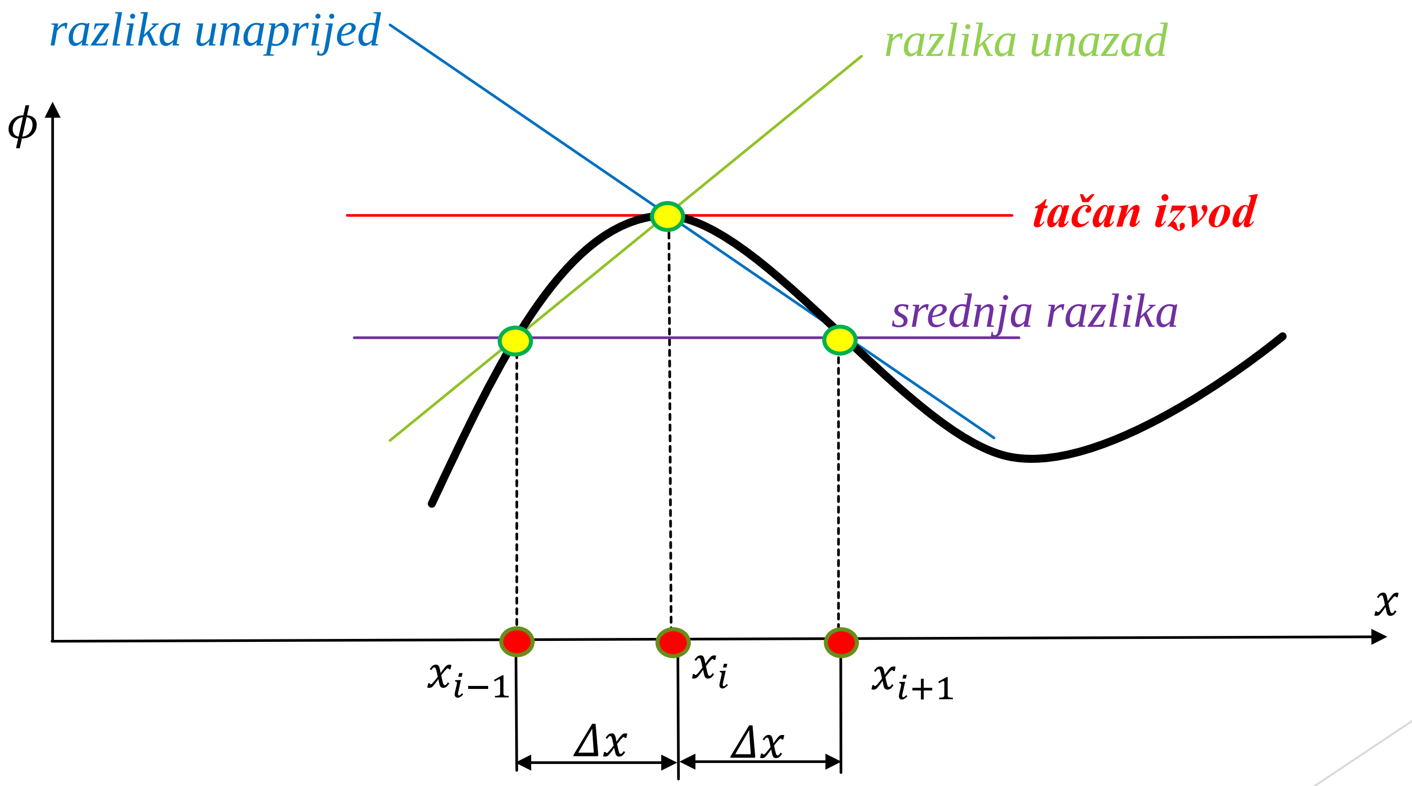

*Dvodimenzijska diskretizacija (raspored čvorova)*

Ideja za aproksimaciju derivacije (izvoda) u MKR proizašla je iz definicije same derivacije.

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{x_i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x_i + \Delta x) - \phi(x_i)}{\Delta x} \qquad (6.1)$$

Aproksimacija izvoda u MKR bazira se na njegovoj geometrijskoj interpretaciji prema kojoj prvi izvod u posmatranoj tački (čvoru) $x_i$ predstavlja nagib tangente na krivu $\phi(x)$ u toj tački (čvoru) u odnosu na pozitivan smjer opisane ose.

Taj nagib moguće je aproksimirati s pravcima koji prolaze kroz susjedne tačke na krivoj.




*Definicija derivacije i njene aproksimacije*

Tangentu na krivu koja predstavlja prvi izvod moguće je aproksimirati pravcem koji predstavlja razliku unaprijed (forward difference), pravcem koji predstavlja razliku unazad (backward difference) i pravcem koji označava srednju razliku (central difference). Srednja razlika se još u matemaci naziva simetrična razlika.

Nagibi prethodno navedenih pravaca jednaki su aproksimacijama prvog izvoda.

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \qquad (6.2)$$

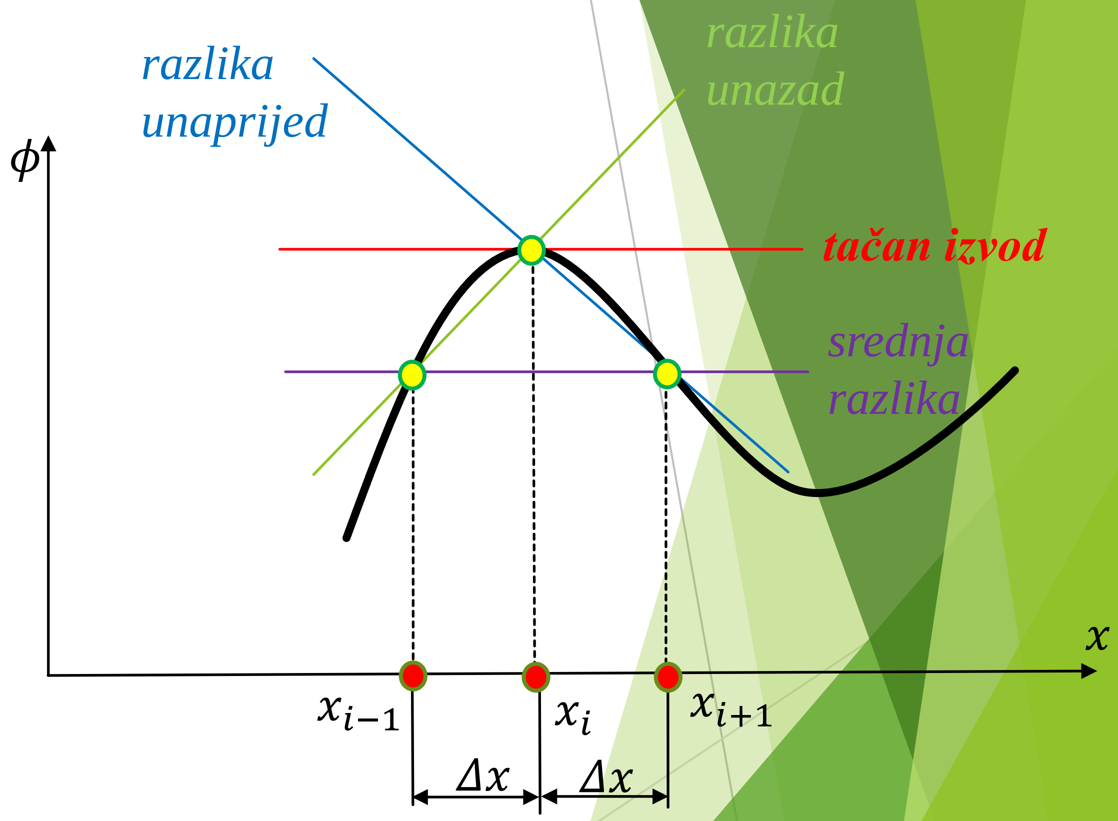
*-razlika unaprijed*

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_i \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \qquad (6.3)$$

*-razlika unazad*

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \qquad (6.4)$$

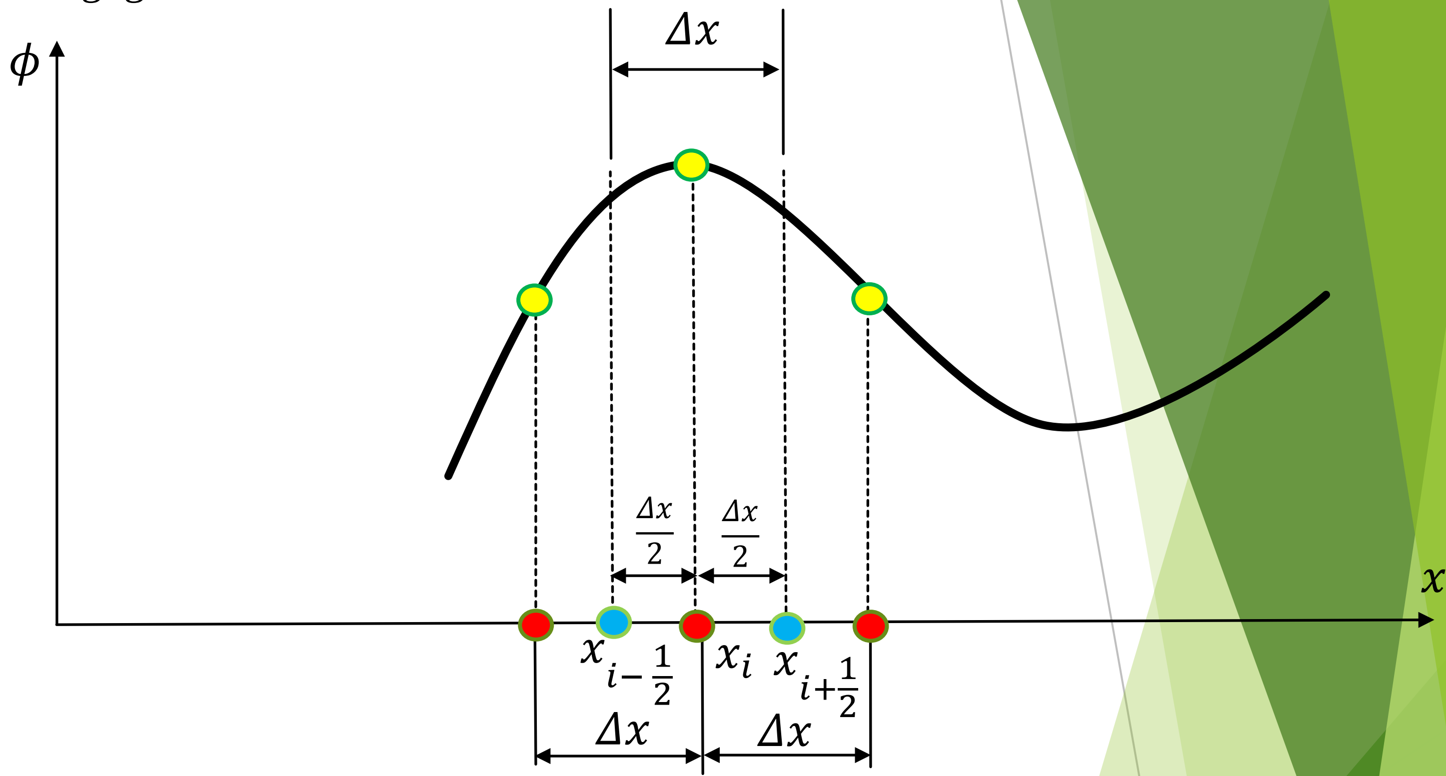
*- srednja razlika*




Na osnovu prethodne tri aproksimacije prvog izvoda se može zaključiti da metoda srednje razlike predstavlja najtačniju aproksimaciju i nju ćemo koristiti pri rješavanju diferencijalnih jednačina. Procjena greške provodi se pomoću razvoja funkcije u Taylorov red.

Analognim postupkom izvodi se izraz za aproksimaciju drugog izvoda.

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{d\phi(x_i+\Delta x)}{dx}-\dfrac{d\phi(x_i)}{dx}}{\Delta x} \qquad (6.5)$$




Geometrijska interpretacija drugog izvoda je nagib tangente na krivu koja predstavlja prve izvode. Ako prve izvode aproksimiramo u tačkama između $x_i$ i $x_{i+1}$ te između $x_i$ i $x_{i-1}$, uz pretpostavku jednakog rastojanja između tačaka i uz primjenu šeme srednje razlike (6.4), dobija se

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{2\dfrac{\Delta x}{2}} = \frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{\Delta x} \qquad (6.6)$$

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{i-\frac{1}{2}} \approx \frac{\phi_i-\phi_{i-1}}{2\dfrac{\Delta x}{2}} = \frac{\phi_i-\phi_{i-1}}{\Delta x} \qquad (6.7)$$

Drugi izvod je

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_i \approx \frac{\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \qquad (6.8)$$

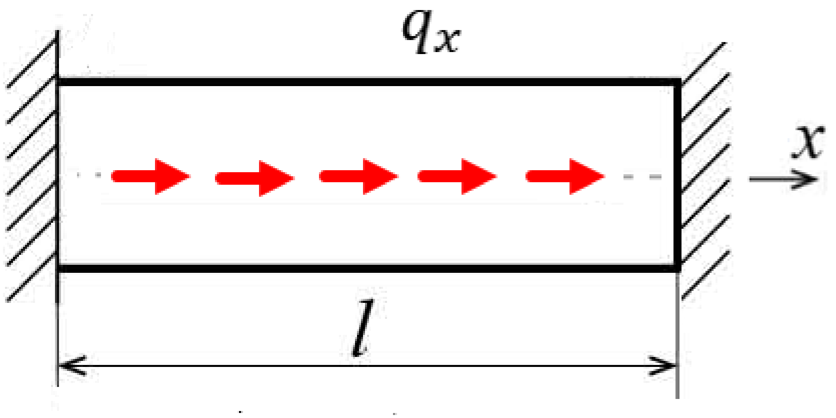
Ako u izraz (6.8) uvrstimo izraze (6.6) i (6.7) dobijamo

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_i \approx \frac{\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{\Delta x} - \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$\boxed{\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{(\Delta x)^2}} \qquad (6.9)$$

## 6.1 Rješavanje problema aksijalno opterećenog štapa primjenom MKR

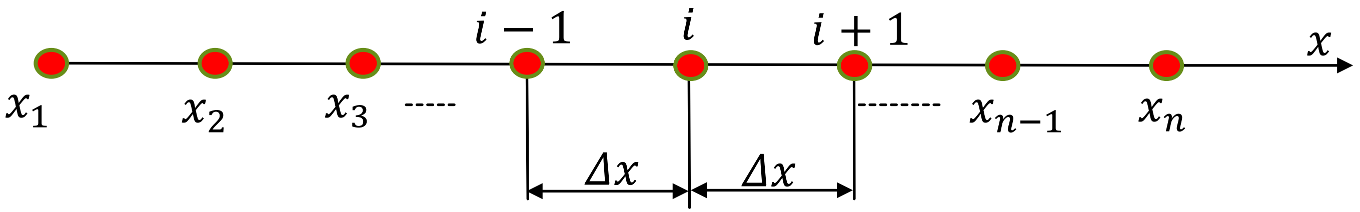
Primjenu metode konačnih razlika ćemo prikazati na primjeru obostrano uklještenog aksijalno opterećenog štapa, konstantne aksijalne krutosti *AE=const.* i kontinualno opterećenog cijelom dužinom. Neka je jednodimenzionalni problem opisan Poissonovom diferencijalnom jednačinom koja opisuje aksijalno opterećen štap.




$$AE \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + q_x = 0$$

$$0 \leq x \leq l$$

Ako se štap diskretizuje sa *n* čvorova, mreža konačnih razlika se može prikazati na sledeći način.



Pomoću jednačine (6.9) Poissonova diferencijalna jednačina prelazi u diferencijalnu jednačinu za *i*-ti čvor

$$AE \cdot \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + q_i = 0$$

$$AE \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2} = -q_i \qquad (6.10)$$

Ako izraz (6.10) primjenimo na sve unutrašnje čvorove dobijamo

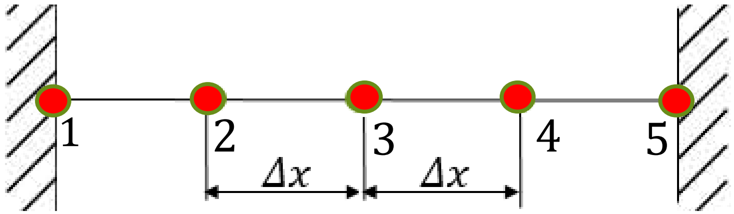
$$u_1 - 2u_2 + u_3 = -\frac{(\Delta x)^2}{AE} q_2$$

$$u_2 - 2u_3 + u_4 = -\frac{(\Delta x)^2}{AE} q_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n = -\frac{(\Delta x)^2}{AE} q_{n-1} \qquad (6.11)$$

Ako štap diskretizujemo sa *n*=5 jednako razmaknutih čvorova, dobijamo sledeći sistem jednačina




$$\Delta x = \frac{l}{4}$$

$$q_2 = q_3 = q_4 = q_0$$

Za čvor 2 $\quad i = 2$

$$\cancel{u_1} - 2u_2 + u_3 = -\frac{(\Delta x)^2}{AE} q_0$$

Za čvor 3 $\quad i = 3$

$$u_2 - 2u_3 + u_4 = -\frac{(\Delta x)^2}{AE} q_0$$

Za čvor 4 $\quad i = 4$

$$u_3 - 2u_4 + \cancel{u_5} = -\frac{(\Delta x)^2}{AE} q_0$$

Na osnovu konturnih uslova slijedi da je

$$u_1 = u_5 = 0$$

Nakon uvrštavanja konturnih uslova dobijamo sistem od tri diferencijalne jednačine sa tri nepoznate.

$$2u_2 - u_3 = \frac{l^2}{16AE} q_0$$

$$-u_2 + 2u_3 - u_4 = \frac{l^2}{16AE} q_0$$

$$-u_3 + 2u_4 = \frac{l^2}{16AE} q_0$$

Jednačine možemo napisati u matričnom obliku i na taj način ih rješavati.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{q_0 l^2}{16AE} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rješenja (aksijalna pomjeranja) u čvorovima su:

$$u_2 = \frac{3}{32} \frac{q_0 l^2}{AE},$$

$$u_3 = \frac{1}{8} \frac{q_0 l^2}{AE},$$

$$u_4 = \frac{3}{32} \frac{q_0 l^2}{AE},$$

Pomoću metode konačnih razlika dobijaju se vrijednosti pomaka u unaprijed definisanim tačkama i poklapaju se sa analitičkim rješenjima.

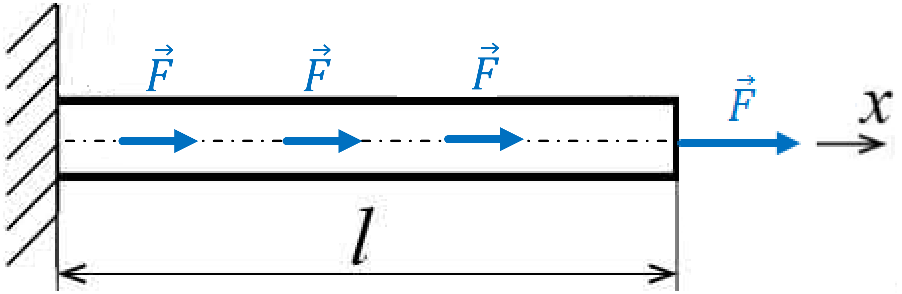
Ako je štap opterećen koncentrisanom silom $F$ koja djeluje u nekom proizvoljnom čvoru i potrebno je tu silu zamjeniti sa ekvivalentnim kontinualnim opterećenjem na dužini $\Delta x$ , $q_i = \frac{F_i}{\Delta x}$ diferencijska jednačina (6.10) može napisati u sledećem obliku

$$u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} = -\frac{\Delta x}{AE} F_i \qquad (6.12)$$

Kada su osim geometrijskih graničnih uslova zadani i prirodni konturni uslovi (uslovi sila), odnosno ako na jednom kraju štapa djeluje koncentrisana sila, potrebno je prvi izvod zamjeniti odgovarajućom šemom konačnih razlika (šema ralike unaprijed i unazad).

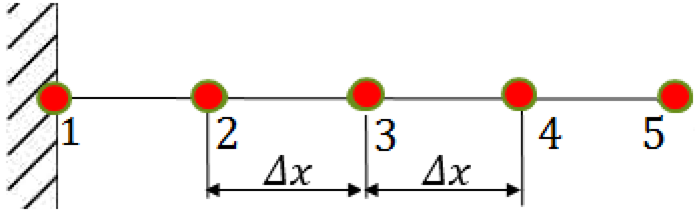
**Primjer 1.**

Za štap konstantne aksijalne krutosti *AE=const.* zadan i opterećen prema slici potrebno je primjenom metode konačnih razlika izračunati pomake u čvorovima. Štap diskretizovati sa *n=5* jednako razmaknutih čvorova.




Zadato je:

$$F = \frac{q_0 l}{2}$$
$$AE = const.$$
$$l$$




Mreža konačnih razlika

$$\Delta x = \frac{l}{4} \qquad F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = \frac{q_0 l}{2}$$

Na osnovu konturnih uslova slijedi da je

$$u_1 = 0$$

Za čvor 2 $\qquad i = 2$

$$\cancel{u_1} - 2u_2 + u_3 = -\frac{(\Delta x)^2}{AE} F_2$$

Za čvor 3 $\qquad i = 3$

$$u_2 - 2u_3 + u_4 = -\frac{(\Delta x)^2}{AE} F_3$$

Za čvor 4 $\qquad i = 4$

$$u_3 - 2u_4 + u_5 = -\frac{(\Delta x)^2}{AE} F_4$$

U čvoru 5 potrebno je zadovoljiti konturni uslov sila $AE\dfrac{du}{dx} = F$

Čvor 5 se nalazi na desnom kraju štapa pa kod aproksimacije prvog izvoda u prethodnim jednačinama moramo koristiti šemu razlike unazad i dobijamo

$$i = 5$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_5 - u_4}{\Delta x} \Longrightarrow AE\frac{u_5 - u_4}{\Delta x} = F_5 \Longrightarrow u_5 - u_4 = \frac{\Delta x F_5}{AE}$$

$$-u_4 + u_5 = \frac{\Delta x F_5}{AE}$$

Ako u prethodne jednačine uvrstimo izraz za silu i rastojanje između čvorova dobijamo

$$\Delta x = \frac{l}{4}$$

$$2u_2 - u_3 = \frac{q_0 l^3}{32AE}$$

$$-u_2 + 2u_3 - u_4 = \frac{q_0 l^3}{32AE}$$

$$-u_3 + 2u_4 - u_5 = \frac{q_0 l^3}{32AE}$$

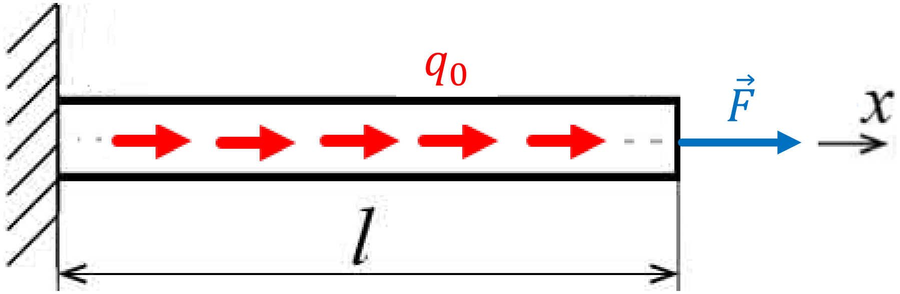
$$-u_4 + u_5 = \frac{q_0 l^2}{8AE}$$

Jednačine možemo napisati u matričnom obliku i na taj način ih rješavati.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \frac{q_0}{AE} \begin{bmatrix} \frac{l^3}{32} \\ \frac{l^3}{32} \\ \frac{l^3}{32} \\ \frac{l^2}{8} \end{bmatrix}$$

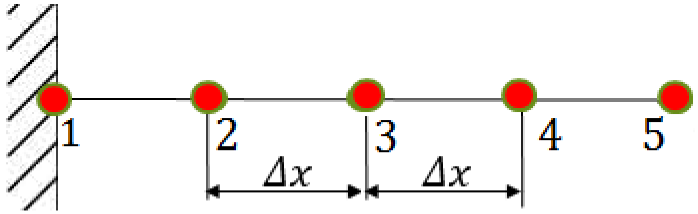
**Primjer 2.**

Za štap konstantne aksijalne krutosti *AE=const.* zadan i opterećen prema slici potrebno je primjenom metode konačnih razlika izračunati pomake u čvorovima. Štap diskretizovati sa *n=5* jednako razmaknutih čvorova.




Zadato je:

$$q_0 = const.$$
$$F = \frac{q_0 l}{2}$$
$$AE = const.$$
$$l$$




Mreža konačnih razlika

$$\Delta x = \frac{l}{4} \qquad q_2 = q_3 = q_4 = q_0$$

Na osnovu konturnih uslova slijedi da je

$$u_1 = 0$$

Za čvor 2 $\quad i = 2$

$$\cancel{u_1} - 2u_2 + u_3 = -\frac{(\Delta x)^2}{AE} q_0$$

Za čvor 3 $\quad i = 3$

$$u_2 - 2u_3 + u_4 = -\frac{(\Delta x)^2}{AE} q_0$$

Za čvor 4 $\quad i = 4$

$$u_3 - 2u_4 + u_5 = -\frac{(\Delta x)^2}{AE} q_0$$

U čvoru 5 potrebno je zadovoljiti konturni uslov sila $\quad AE\dfrac{du}{dx} = F$

Čvor 5 se nalazi na desnom kraju štapa pa kod aproksimacije prvog izvoda u prethodnim jednačinama moramo koristiti šemu razlike unazad i dobijamo

$$i = 5$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_5 - u_4}{\Delta x} \quad \Longrightarrow \quad AE\frac{u_5 - u_4}{\Delta x} = F \quad \Longrightarrow \quad u_5 - u_4 = \frac{\Delta x F}{AE}$$

$$-u_4 + u_5 = \frac{\Delta x F}{AE}$$

Ako u prethodne jednačine uvrstimo izraz za silu i rastojanje između čvorova dobijamo

$$F = \frac{q_0 l}{2} \qquad \Delta x = \frac{l}{4}$$

$$2u_2 - u_3 = \frac{q_0 l^2}{16AE}$$

$$-u_2 + 2u_3 - u_4 = \frac{q_0 l^2}{16AE}$$

$$-u_3 + 2u_4 - u_5 = \frac{q_0 l^2}{16AE}$$

$$-u_4 + u_5 = \frac{q_0 l^2}{8AE}$$

Jednačine možemo napisati u matričnom obliku i na taj način ih rješavati.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \frac{q_0 l^2}{16AE} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Rješenje je jednako

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \frac{q_0 l^2}{16AE} \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix}$$

| **Čvorovi** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| MKR | 0,313 | 0,563 | 0,75 | 0,875 |
| Analitičko rješenje | 0,344 | 0,625 | 0,844 | 1,00 |

Ako numeričko rješenje uporedimo sa rješenjima dobijenim analitičkim putem možemo primjetiti da postoji odstupanje u rezultatima. To znači da je diskretizaciju potrebno provesti sa više čvorova.