Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Mašinski fakultet Istočno Sarajevo

Numeričke metode u inženjerstvu

6.Metoda konačnih razlika (MKR)
6.2 Rješavanje problema grede opterećene na savijanje primjenom MKR
6.3 Opisivanje konturnih uslova

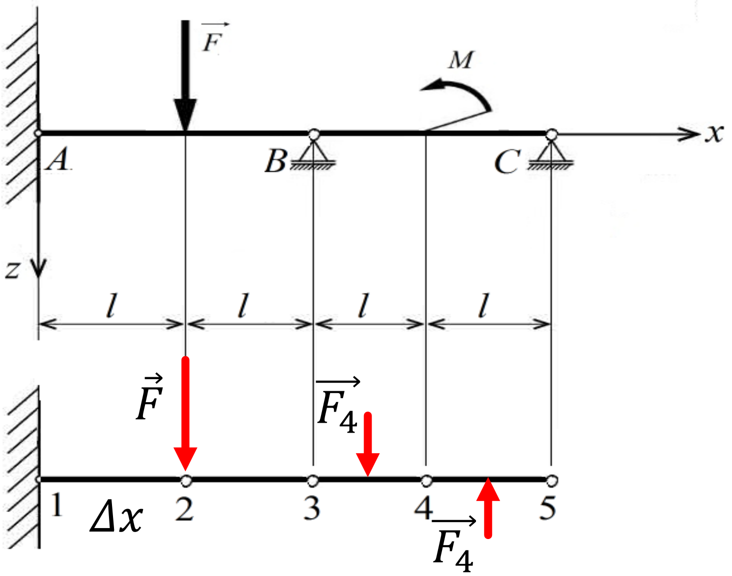
Doc. dr Dejan Jeremić

Najstarija diskretizacijska metoda je ***metoda konačnih razlika (MKR)*** koja je svoju pravu primjenu našla sa razvojem računara. Metoda konačnih razlika je numerička metoda koja služi za rješavanje problema mehanike deformabilnih tijela, mehanike fluida, prenosa toplote, tj. za rješavanje problema koji su matematički modelirani diferencijalnim jednačinama.

Nedostatak ove metode se ogleda u tome da je za složenije probleme veoma teško opisati granične (konturne) uslove, a to posebno dolazi do izražaja ako su u granične uslove uključene derivacije višeg reda. Danas se ova metoda uglavnom primjenjuje za rješavanje problema u mehanici fluida i za vremensku diskretizaciju pri rješavanju nestacionarnih problema. U mehanici deformabilnih tijela primjenjuje se samo za rješavanje jednostavnih problema.

MKR se temelji na diskretizaciji razmatranog područja disketnim tačkama (čvorovima) koje čine mrežu konačnih razlika. Za svaki čvor se dobija jedna algebarska diferencijalna jednačina koja povezuje nepoznatu vrijednost u čvoru sa vrijednostima te varijable u odgovarajućem broju susjednih čvorova.

U tačkama se postavljaju diferencijalne jednačine pri čemu se derivacije (izvodi) zamjenjuju konačnim razlikama koje se opisuju vrijednostima zavisnih varijabli u susjednim čvorovima.



$n = 5$ -broj čvorova

$w_1 = 0$

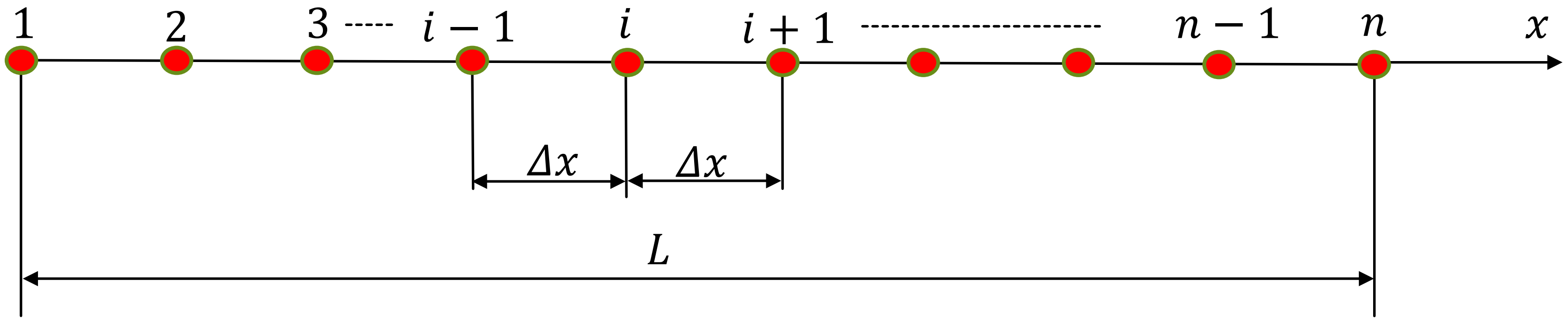
$w_3 = 0$ -vertikalno pomjeranje u čvorovima

$w_5 = 0$

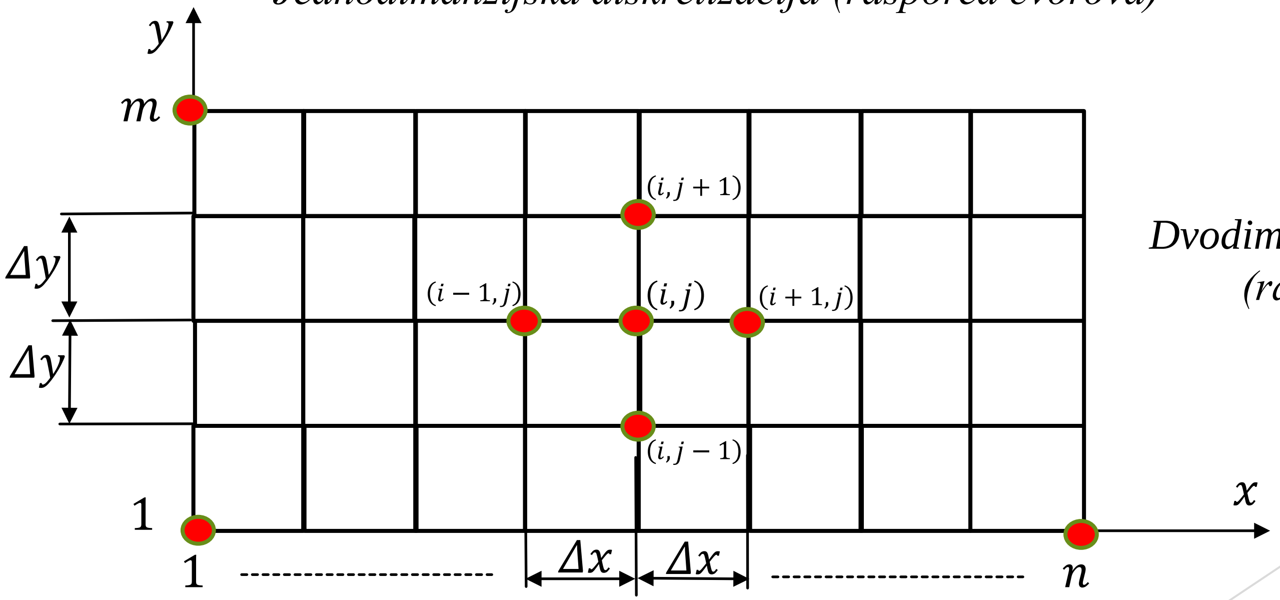
Dobija se sistem algebarskih jednačina čija su rješenja vrijednosti varijabli u čvorovima. Rješenja za područja između čvorova po pravilu nije moguće dobiti jer se metoda ne temelji na aproksimacijskim funkcijama.

Svakom čvoru je potrebno aproksimirati diferencijalnu jednačinu određenim izrazima koji su karakteristični za MKR. Broj obuhvaćenih čvorova zavisi od reda izvoda u diferencijalnoj jednačini. Na taj način se dobija sistem linearnih algebarskih jednačina čiji je broj jednak broju čvorov, odnosno nepopoznatih.

Diferencijalna jednačina se transformiše u tzv. diferencijsku jednačinu (linearnu algebarsku jednačinu). Svakom čvoru za koji se izvodi diskretizovana jednačina pridruženi su indeksi koji se povećavaju, odnosno smanjuju u susjednim čvorovima.



Jednodimanzijska diskretizacija (raspored čvorova)



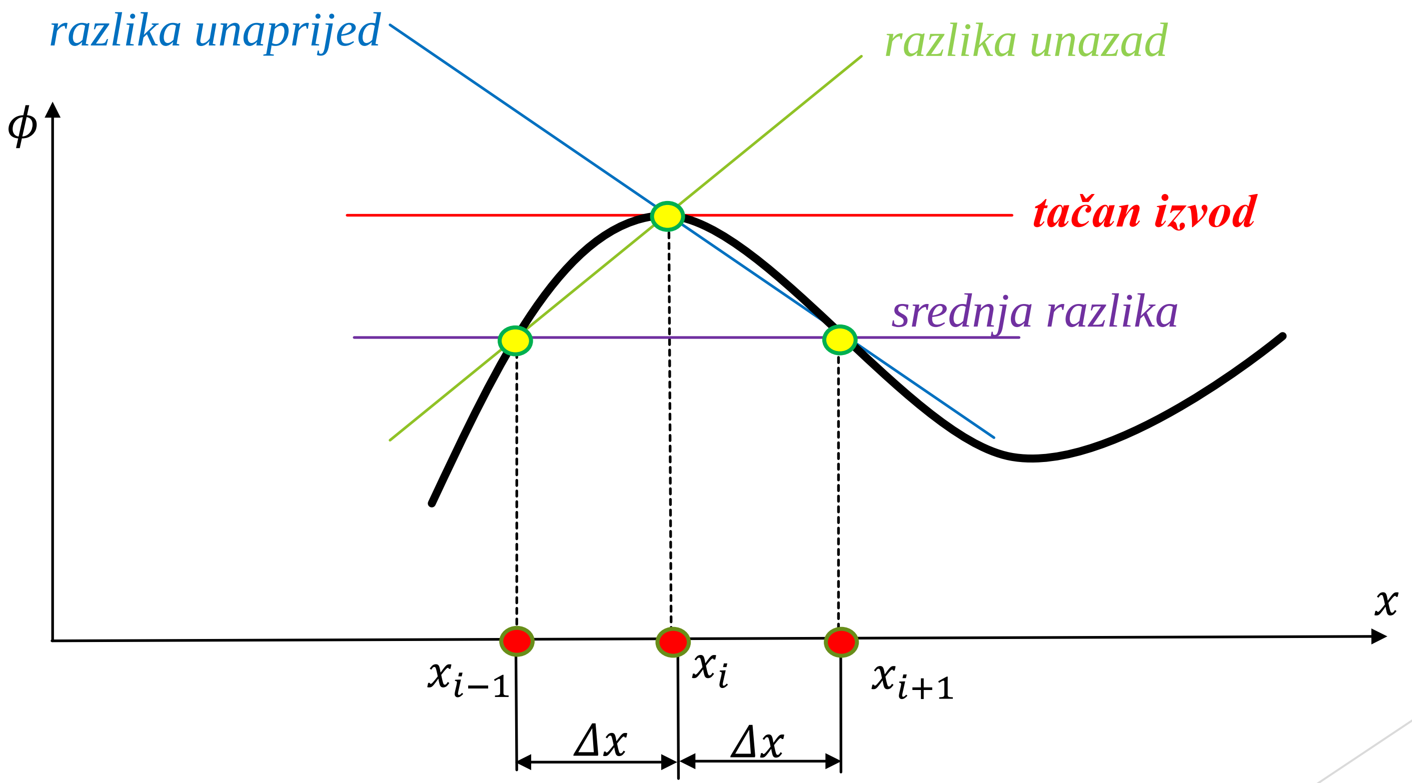
Dvodimenzijska diskretizacija (raspored čvorova)

Ideja za aproksimaciju derivacije (izvoda) u MKR proizašla je iz definicije same derivacije.

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{x_i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x_i + \Delta x) - \phi(x_i)}{\Delta x} \qquad (6.1)$$

Aproksimacija izvoda u MKR bazira se na njegovoj geometrijskoj interpretaciji prema kojoj prvi izvod u posmatranoj tački (čvoru) x_i predstavlja nagib tangente na krivu $\phi(x)$ u toj tački (čvoru) u odnosu na pozitivan smjer opisane ose.

Taj nagib moguće je aproksimirati s pravcima koji prolaze kroz susjedne tačke na krivoj.



Definicija derivacije i njene aproksimacije

Tangentu na krivu koja predstavlja prvi izvod moguće je aproksimirati pravcem koji predstavlja razliku unaprijed (forward difference), pravcem koji predstavlja razliku unazad (backward difference) i pravcem koji označava srednju razliku (central difference). Srednja razlika se još u matemaci naziva simetrična razlika.

Nagibi prethodno navedenih pravaca jednaki su aproksimacijama prvog izvoda.

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \qquad (6.2)$$

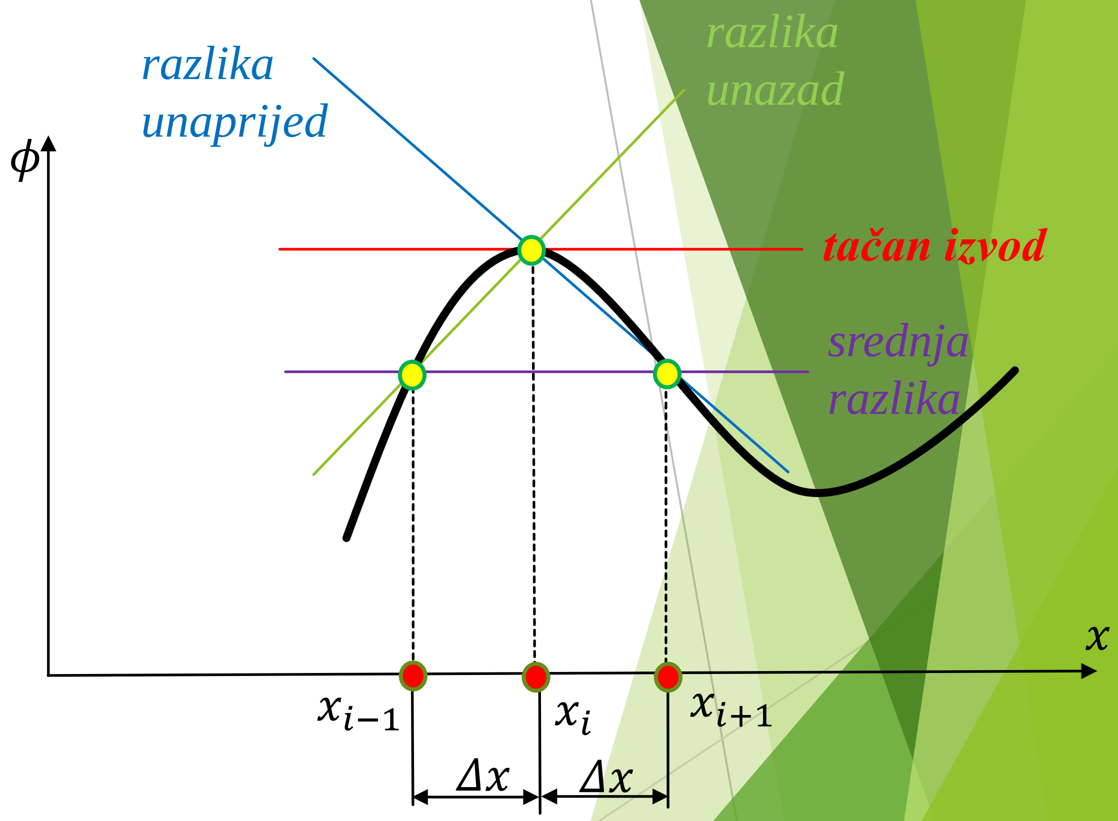
-razlika unaprijed

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_i \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \qquad (6.3)$$

-razlika unazad

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \qquad (6.4)$$

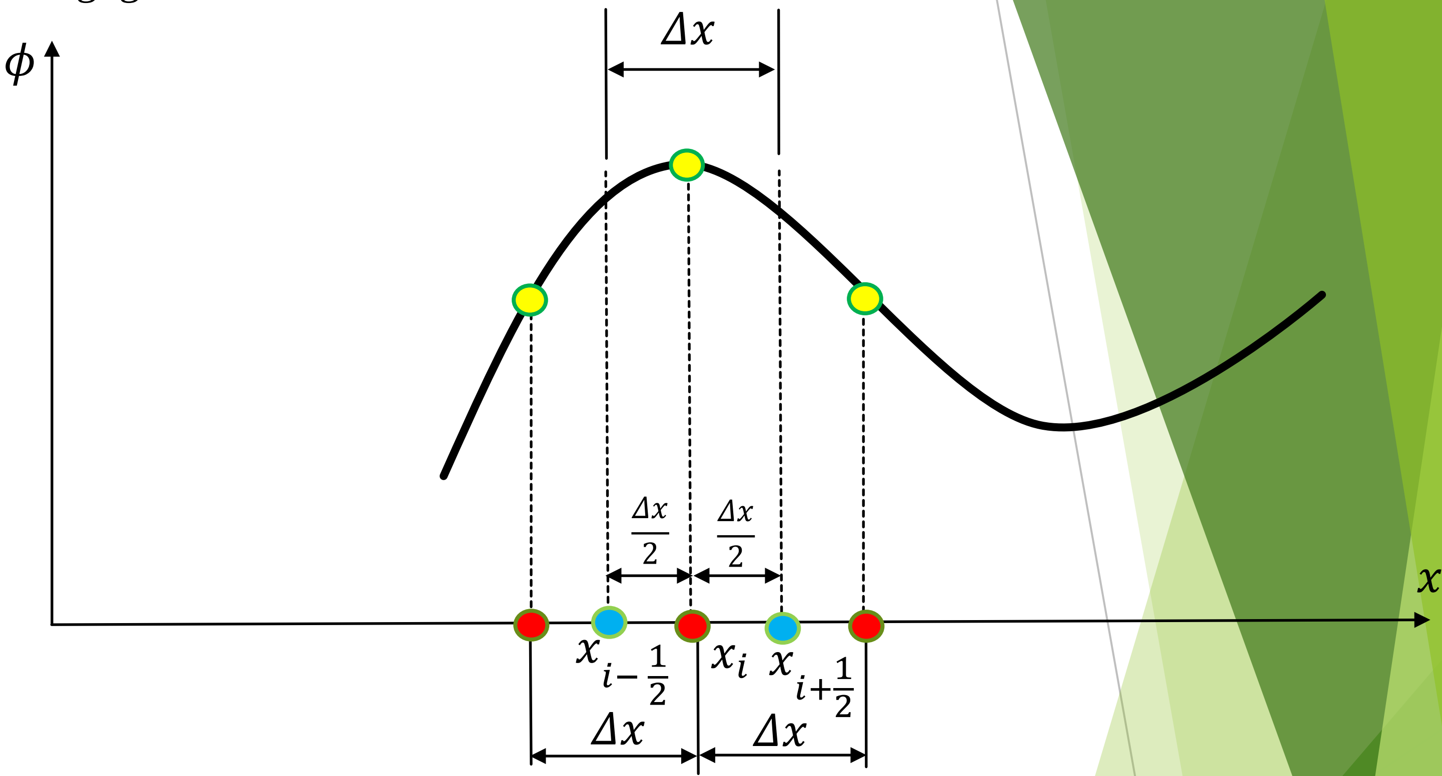
- srednja razlika



Na osnovu prethodne tri aproksimacije prvog izvoda se može zaključiti da metoda srednje razlike predstavlja najtačniju aproksimaciju i nju ćemo koristiti pri rješavanju diferencijalnih jednačina. Procjena greške provodi se pomoću razvoja funkcije u Taylorov red.

Analognim postupkom izvodi se izraz za aproksimaciju drugog izvoda.

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d\phi(x_i + \Delta x)}{dx} - \frac{d\phi(x_i)}{dx}}{\Delta x} \qquad (6.5)$$



Geometrijska interpretacija drugog izvoda je nagib tangente na krivu koja predstavlja prve izvode. Ako prve izvode aproksimiramo u tačkama između x_i i x_{i+1} te između x_i i x_{i-1} , uz pretpostavku jednakog rastojanja između tačaka i uz primjenu šeme srednje razlike (6.4), dobija se

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{2\frac{\Delta x}{2}} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \qquad (6.6)$$

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{i-\frac{1}{2}} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{2\frac{\Delta x}{2}} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \qquad (6.7)$$

Drugi izvod je

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_i \approx \frac{\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \qquad (6.8)$$

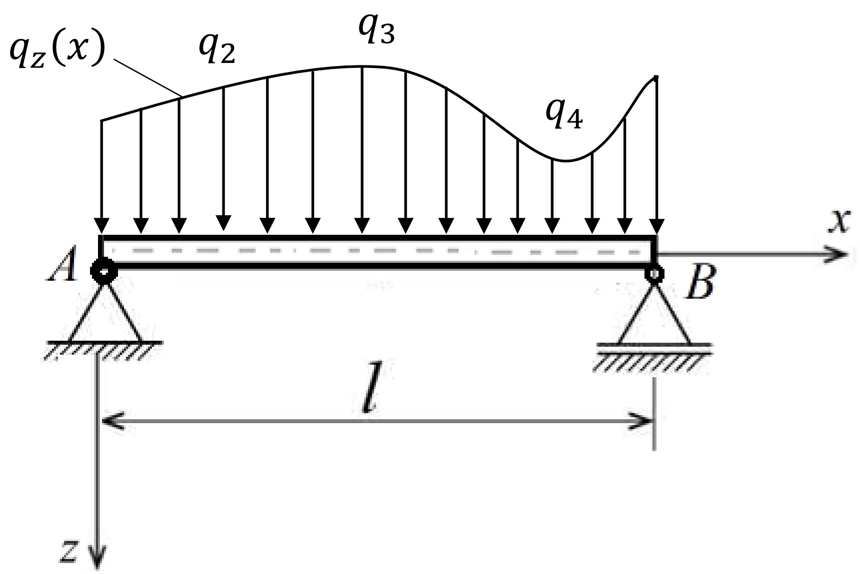
Ako u izraz (6.8) uvrstimo izraze (6.6) i (6.7) dobijamo

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_i \approx \frac{\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} - \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$\boxed{\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{(\Delta x)^2}} \qquad (6.9)$$

6.2 Rješavanje problema grede opterećene na savijanje primjenom MKR

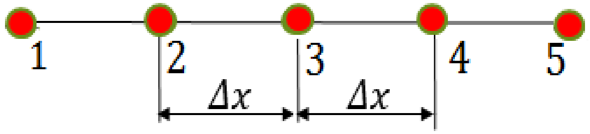
Primjenu metode konačnih razlika ćemo prikazati na primjeru grede kontinualno opterećene na savijanje cijelom dužinom. Najjednostavniji primjer je izračunavanje momenta savijanja za statički određenu gredu.



$$\frac{d^2M_y}{dx^2} = -q_z$$ -diferencijalna jednačina savijanja

$$0 \leq x \leq l$$

Ako se štap diskretizuje sa *n*=*5* čvorova, mreža konačnih razlika se može prikazati na sledeći način.



Diferencijalna jednačina savijanja grede se može napisati u diferencijskom obliku na osnovu izraza (6.9)

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{d^2M}{dx^2}\right)_i \approx \frac{M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

na osnovu kojeg dobijamo

$$\frac{M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1}}{(\Delta x)^2} = -q_z$$

$$\boxed{M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1} = -q_z(\Delta x)^2} \qquad (6.13)$$

Izraz (6.13) možemo napisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{i-1} \\ M_i \\ M_{i+1} \end{bmatrix} = -q_i(\Delta x)^2 \qquad (6.14)$$

Iz matričnog oblika se vidi da rješenje zavisi od odnosa opterećenja u razmatranom čvoru, a ne uzima u obzir raspodjelu opterećenja između čvorova što smanjuje tačnost.

Na osnovu konturnih uslova $M_1 = M_5 = 0$ statički određene grede prikazane na prethodnoj slici dobijamo tri jednačine

$$i = 2$$
$$\cancel{M_1} - 2M_2 + M_3 = -q_2(\Delta x)^2$$
$$i = 3$$
$$M_2 - 2M_3 + M_4 = -q_3(\Delta x)^2$$
$$i = 4$$
$$M_3 - 2M_4 + \cancel{M_5} = -q_4(\Delta x)^2$$

Jednačine možemo zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = (\Delta x)^2 \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

Tačnije rješenje se dobija kada se stvarno opterećenje koje djeluje između čvorova raspodjeljeno po dužini nosača, zamjenim ekvivalentnim čvornim silama koje se aproksimiraju relacijom

$$F_i = q_i \Delta x \qquad (6.15)$$

$$\Downarrow$$

$$q_i = \frac{F_i}{\Delta x}$$

Uvrštavanjem u izraz (6.14) dobijamo

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{i-1} \\ M_i \\ M_{i+1} \end{bmatrix} = -F_i \Delta x \quad (6.16)$$

Veza između ugiba i momenta savijanja opisana je izrazom (3.7)

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y$$

Ova relacija se može primjeniti kada su momenti savijanja poznati, što je slučaj kod statički određenog nosača. Za statički neodređene nosače mnogo je prikladnije koristiti izraz koji povezuje ugib i spoljašnje opterećenje (diferencijalnu jednačinu savijanja)

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = -q_z \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2}{dx^2}\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}\right) = q_z \qquad (6.17)$$

Pomoću konačnih razlika lijeva strana izraza (6.17) se može napisati u obliku

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}\right) = -\frac{d^2 M}{dx^2} = -\frac{1}{(\Delta x)^2}(M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1})$$

pa diferencijska jednačina je jednaka

$$-\frac{1}{(\Delta x)^2}(M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}) = q_i \qquad (6.18)$$

Zbog pojednostavljenja izostavili smo indekse y i z.

$$M_i = -EI_i\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_i$$

$$M_i = -\frac{EI_i}{(\Delta x)^2}(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) \qquad (6.19)$$

Analogno dobijamo momente u čvorovima *i-1* i *i+1*

$$M_{i-1} = -\frac{EI_{i-1}}{(\Delta x)^2}(w_{i-2} - 2w_{i-1} + w_i) \qquad (6.20)$$

$$M_{i+1} = -\frac{EI_{i+1}}{(\Delta x)^2}(w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2}) \qquad (6.21)$$

Nakon uvrštavanja izraza (6.19-6.21) u izraz (6.18) dobijamo

$$-\frac{1}{(\Delta x)^2}\left[-\frac{EI_{i-1}}{(\Delta x)^2}(w_{i-2} - 2w_{i-1} + w_i) + 2\frac{EI_i}{(\Delta x)^2}(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) - \frac{EI_{i+1}}{(\Delta x)^2}(w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2})\right] = q_i$$

Ako je poprečni presjek grede konstantan $I_{i-1} = I_i = I_{i+1} = I$ dobijamo

$$\frac{EI}{(\Delta x)^4}[w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}] = q_i \qquad (6.22)$$

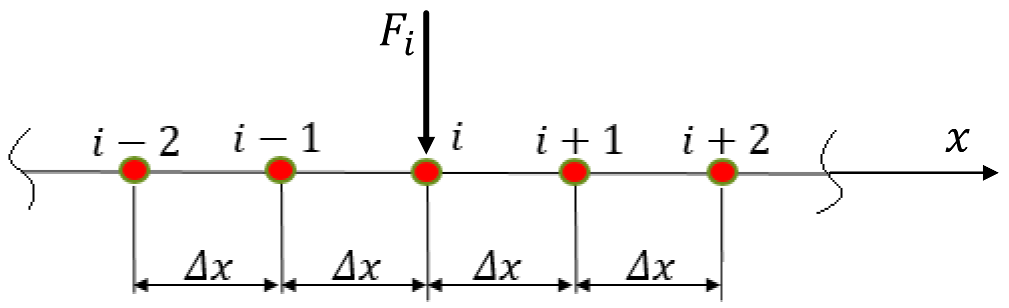
Izraz (6.22) možemo napisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{i-2} \\ w_{i-1} \\ w_i \\ w_{i+1} \\ w_{i+2} \end{bmatrix} = \frac{(\Delta x)^4}{EI} q_i \qquad (6.23)$$

Kada se kontinualno opterećenje zamjeni sa ekvivalentnom silom (6.15) dobijamo izraz za čvorove koji su dovoljno udaljeni od konture.

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{i-2} \\ w_{i-1} \\ w_i \\ w_{i+1} \\ w_{i+2} \end{bmatrix} = \frac{(\Delta x)^3}{EI} F_i} \qquad (6.24)$$

-jednačina konačnih razlika

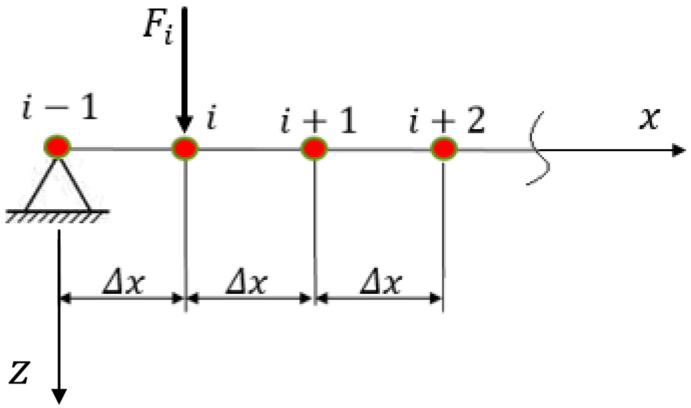


Kad u i-tom čvoru djeluje koncentrisani moment savijanja, potrebno ga je zamjeniti ekvivalentnim spregom sila koje djeluju u susjednim čvorovima.

Ako je čvor i za koji je postavljena jednačina konačnih razlika (6.24) sa samoj konturi ili doboljno blizi konture, jednačinom su tada obuhvaćeni čvorovi koji se nalaze izvan diskretizovane grede. Pomake u tim čvorovima je potrebno prikazati pomoću veličina koje su pridružene čvorovima u diskretizovanom područku, što se postiže definisanjem konturnih uslova.

6.3 Opisivanje konturnih uslova

Zglobno oslonjena ivica (važi za pokretni i nepokretni oslonac)

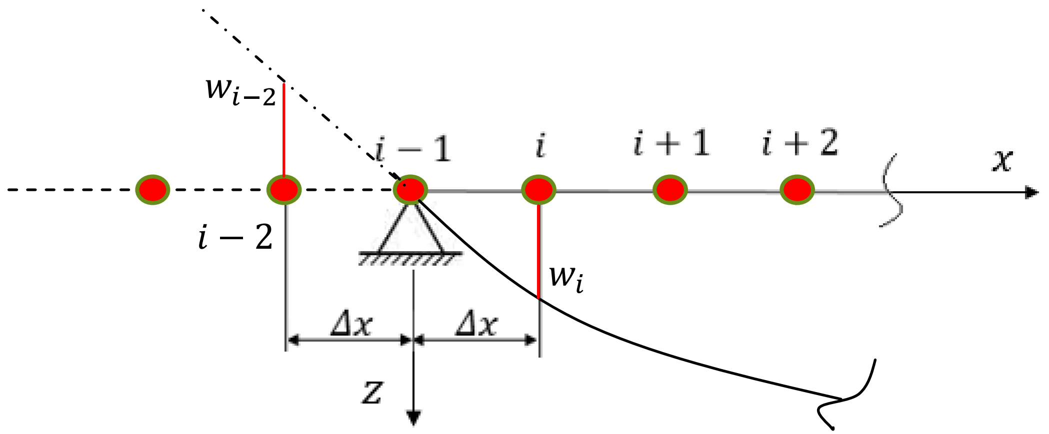


Za zglobno oslonjenu ivicu i čvor u osloncu vrijedi konturni uslov

$$\begin{aligned} w_{i-1} &= 0 \\ M_{i-1} &= 0 \end{aligned} \qquad (6.25)$$

Čvor *i-2*, čiju vrijednost je potrebno uvrstiti u jednačinu konačnih razlika (6.24) za čvor *i* je izašao izvan područja grede. Konturni uslov (6.25) je ispunjen kada greda kontinualno prelazi izvan oslonca pri čemu za čvor *i-2* vrijedi

$$w_{i-2} = -w_i$$



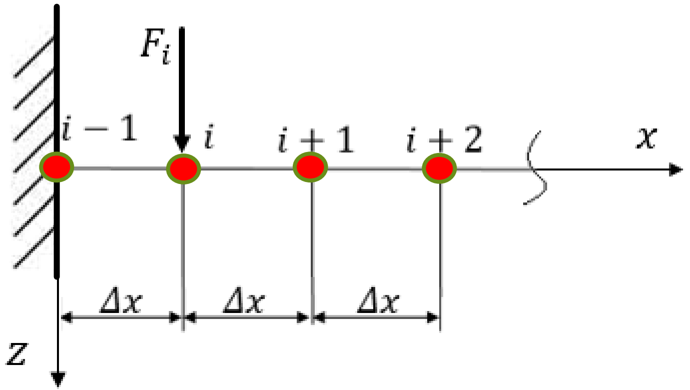
Uvrštavanjem konturnih uslova $w_{i-2} = -w_i, w_{i-1} = 0$ u jednačinu konačnih razlika(6.24) dobija se za čvor *i* sljedeća jednačina

$$w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2} = \frac{(\Delta x)^3}{EI} F_i$$

$$-w_i + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2} = \frac{(\Delta x)^3}{EI} F_i$$

$$\boxed{5w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2} = \frac{(\Delta x)^3}{EI} F_i \qquad \text{ili} \qquad \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ w_{i+1} \\ w_{i+2} \end{bmatrix} = \frac{(\Delta x)^3}{EI} F_i} \qquad (6.26)$$

Uklještena ivica



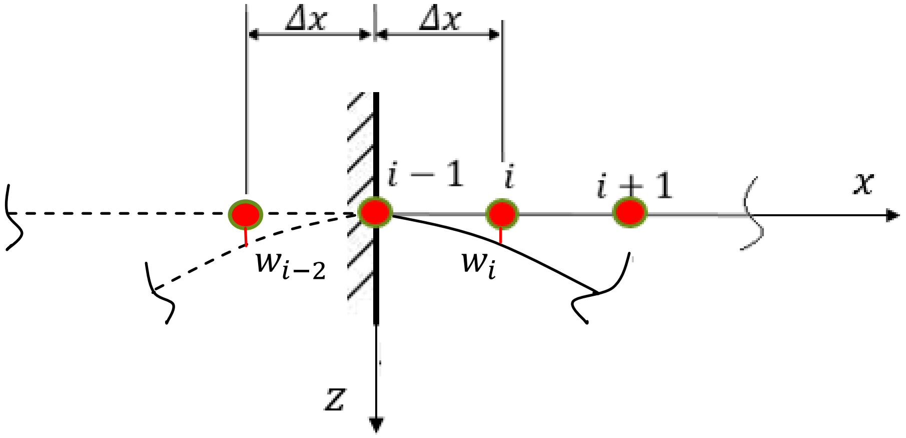
Za uklještenu ivicu i čvor u uklještenju vrijedi konturni uslov

$$w_{i-1} = 0$$

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{i-1} = 0 \qquad (6.27)$$

Konturni uslov (6.27) je ispunjen kada greda kontinualno prelazi izvan uklještene ivice pri čemu je

$$w_{i-2} = w_i$$



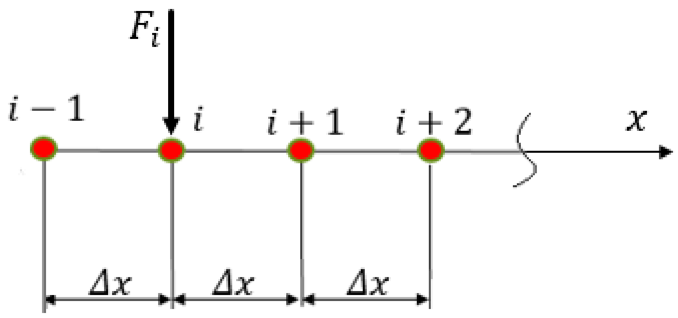
Uvrštavanjem konturnih uslova $w_{i-2} = w_i, w_{i-1} = 0$ u jednačinu konačnih razlika(6.24) dobija se za čvor i sljedeća jednačina

$$w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2} = \frac{(\Delta x)^3}{EI} F_i$$

$$w_i + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2} = \frac{(\Delta x)^3}{EI} F_i$$

$$\boxed{7w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2} = \frac{(\Delta x)^3}{EI} F_i \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ w_{i+1} \\ w_{i+2} \end{bmatrix} = \frac{(\Delta x)^3}{EI} F_i} \qquad (6.28)$$

Slobodna ivica



Za slobodnu ivicu grede vrijedi konturni uslov

$$M_{i-1} = 0 \qquad (6.29)$$

Ako u izraz (6.16) $M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1} = -F_i \Delta x$ ili $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{i-1} \\ M_i \\ M_{i+1} \end{bmatrix} = -F_i \Delta x$ uvrstimo konturni uslov (6.29) i izraze (6.19 i 6.21) uz pretpostavkuda je greda konstantnog poprečnog presjeka $I_{i-1} = I_i = I_{i+1} = I$ dobijamo

$$M_i = -\frac{EI_i}{(\Delta x)^2}(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) \qquad (6.19)$$

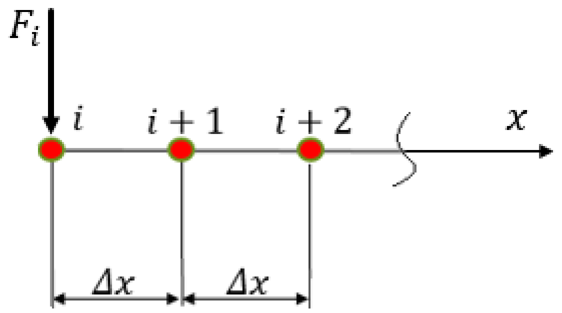
$$M_{i+1} = -\frac{EI_{i+1}}{(\Delta x)^2}(w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2}) \qquad (6.21)$$

$$2\frac{EI_i}{(\Delta x)^2}(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) - \frac{EI_{i+1}}{(\Delta x)^2}(w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2}) = -F_i \Delta x$$

Sređivanjem prethodnog izraza dobijamo

$$\boxed{\begin{gathered} -2w_{i-1} - 5w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2} = \frac{(\Delta x)^3}{EI} F_i \\ \begin{bmatrix} -2 & 5 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{i-1} \\ w_i \\ w_{i+1} \\ w_{i+2} \end{bmatrix} = \frac{(\Delta x)^3}{EI} F_i \end{gathered}} \qquad (6.30)$$

Ako na čvor na ivici djeluje sila u izraz (6.21) uvrštava se



$$M_{i+1} = -F_i \Delta x \qquad (6.31)$$

Na taj način dobijamo

$$M_{i+1} = -\frac{EI_{i+1}}{(\Delta x)^2}(w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2})$$

$$-F_i \Delta x = -\frac{EI_{i+1}}{(\Delta x)^2}(w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2})$$

$$\boxed{\begin{gathered} w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2} = \frac{(\Delta x)^3}{EI} F_i \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ w_{i+1} \\ w_{i+2} \end{bmatrix} = \frac{(\Delta x)^3}{EI} F_i \end{gathered}} \qquad (6.32)$$

Postavljanjem jednačina konačnih razlika za svaki čvor za koji je nepoznat pomak, dobija se sistem linearnih algebarskih jednačina čiji broj je jednak broju nepoznatih.